

## วิธีการเดินเวลาแบบเร็วสำหรับการลงทะเบียนภาพที่ใช้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสูง

### A Fast Time Marching Method for Higher-Order PDE-Based Image Registration

ศตวรรษ ทิพวรวิมล (Satanan Thipworawimon)\* นพดล ชุมชอบ (Dr.Noppadol Chumchob)\*\*

ภาสวรรณ นพแก้ว (Dr.Passawan Noppakaew)\*\*\*

#### บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ เราพิจารณาผลเฉลยเชิงตัวเลขที่มีประสิทธิภาพของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เป็นเชิงเส้นอันดับสูงที่เกี่ยวข้องกับวิธีการลงทะเบียนภาพที่ใช้เคิร์ฟเวเจอร์แบบเกาส์เซียน ในการได้มาซึ่งผลเฉลยที่มีประสิทธิภาพนั้น เราเริ่มต้นด้วยการประมาณสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยโดยใช้การประมาณไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์และแก้ระบบดิสครีตไม่เป็นเชิงเส้นโดยใช้กรอบเทคนิคการเดินเวลา ผลการทดลองเชิงตัวเลขบนภาพสังเคราะห์แสดงถึงประสิทธิภาพของวิธีการที่ได้นำเสนอ

#### ABSTRACT

In this paper, we are concerned with the efficient numerical solution of the system of higher-order nonlinear partial differential equations (PDEs) associated with the so-called Gaussian curvature based image registration method. In order to obtain efficient solution, we first approximate the PDEs by finite difference approximations and solve the nonlinear discrete system within the framework of time marching techniques. Numerical results on synthetic images show the effectiveness of the proposed numerical method.

**คำสำคัญ:** เคิร์ฟเวเจอร์แบบเกาส์เซียน วิธีการลงทะเบียนภาพ วิธีการเดินเวลา

**Keywords:** Gaussian curvature, Image registration method, Time marching method

\* นักศึกษา หลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

\*\* ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

\*\*\* อาจารย์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

## บทนำ

กำหนดให้  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  แทน โดเมนภาพที่มีรูปร่างเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า  $V \subset [0, \infty)$  แทนเรนจ์ของภาพที่มีโทนความเข้มสีเทา (gray-scale image)  $R: \Omega \rightarrow V$  แทนภาพอ้างอิง (reference image) และ  $T: \Omega \rightarrow V$  แทนภาพแม่แบบ (template image) การลงทะเบียนภาพ (image registration) คือ กระบวนการค้นหาการแปลงรูป (deformation)  $\mathbf{u}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$\mathbf{u}: \mathbf{x} \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}))^T$$

ที่เหมาะสมที่สุดเพื่อทำให้ภาพแม่แบบที่ถูกแปลงพิกัด  $T_u(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}))$  มีความแตกต่างกับภาพอ้างอิง  $R$  น้อยที่สุด เพื่ออำนวยความสะดวกทางคณิตศาสตร์งานวิจัยนี้พิจารณา  $\Omega = [0, 1]^2$  และ  $V = [0, 1]$

ในระยะไม่กี่ปีที่ผ่านมา วิธีการลงทะเบียนภาพที่ใช้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (PDE-based image registration method) เป็นวิธีที่แม่นยำ น่าเชื่อถือและได้รับความนิยมน้อยกว่าหลายในการแก้ปัญหาการลงทะเบียนภาพ สำหรับตัวอย่างการประยุกต์วิธีการลงทะเบียนภาพที่ใช้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากงานวิจัยของ Modersitzki (2004)

ถ้าภาพที่ต้องการลงทะเบียน  $R$  และ  $T$  มีความเข้มภาพ (image intensity) ซึ่งสามารถนำมาเปรียบเทียบกันได้ แล้วระบบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับการลงทะเบียนภาพสามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{cases} T_u(\mathbf{x}) - R(\mathbf{x}) \partial_{u_1} T_u(\mathbf{x}) = 0 \\ T_u(\mathbf{x}) - R(\mathbf{x}) \partial_{u_2} T_u(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

เนื่องจากระบบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (1) เป็นสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ (Euler-Lagrange equation) ของปัญหาเชิงแปรผัน (variational problem)

$$\min_u \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underbrace{(T_u(\mathbf{x}) - R(\mathbf{x}))^2}_{D(u)} dx \quad (2)$$

ซึ่งผลเฉลยไม่ได้มีเพียงหนึ่งเดียว (nonunique solution) ดังนั้นการเพิ่มเทอมเร็กิวลาร์ไรซ์เซชัน (regulari-

zation term)  $\tilde{R}$  เพื่อควบคุมผลเฉลย  $\mathbf{u}$  ให้สอดคล้องกับสมบัติทางคณิตศาสตร์หรือสมบัติอื่นๆ ที่ต้องการ จึงเป็นขั้นตอนที่จำเป็นและหลีกเลี่ยงไม่ได้

หลังจากเพิ่มเทอมเร็กิวลาร์ไรซ์เซชันกับปัญหาเชิงแปรผัน (2) จะได้

$$\min_u D(u) + \alpha \tilde{R}(u) \quad (3)$$

โดยที่  $\alpha > 0$  แทนเร็กิวลาร์ไรซ์เซชันพารามิเตอร์ (regularization parameter) ซึ่งทำหน้าที่ปรับสมดุลระหว่างเทอมที่วัดความแตกต่างระหว่างภาพที่กำลังถูกลงทะเบียน  $D$  และเทอมที่วัดความปรกติของผลเฉลยตามสมบัติที่ต้องการ  $\tilde{R}$  ทั้งนี้สมการออยเลอร์-ลากรางจ์ที่เกี่ยวข้องกับ (3) สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{cases} f_1(u) + \alpha A_1(u) = 0 \\ f_2(u) + \alpha A_2(u) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

โดยที่  $f_l(u)$  และ  $A_l(u)$  ( $l = 1, 2$ ) กำหนดจากการแปรผันอันดับหนึ่ง (first-order variation) ของ  $D$  และ  $\tilde{R}$  ตามลำดับ

โดยทั่วไป เทอมเร็กิวลาร์ไรซ์เซชัน  $\tilde{R}$  ได้มาจากการสมมติว่าการแปลงรูปที่เกิดขึ้นในการลงทะเบียนภาพ  $R$  และ  $T_u$  เกี่ยวข้องกับกระบวนการทางกายภาพ (physical process) เช่น การยืดหยุ่น (elasticity) การแพร่ (diffusion) และการเคลื่อนที่แบบเคิร์ฟเวเจอร์ (curvature motion) จากการทบทวนวรรณกรรมที่เกี่ยวข้องพบว่าเร็กิวลาร์ไรซ์เซชันที่ใช้ อนุพันธ์อันดับหนึ่งของ  $\mathbf{u}$  เช่น เร็กิวลาร์ไรซ์เซชันแบบดิฟฟิวชัน (diffusive regularization) (Fischer and Modersitzki, 2002)

$$\tilde{R}^{\text{Diff}}(u) = \sum_{l=1}^2 \int_{\Omega} |\nabla u_l(\mathbf{x})|^2 dx$$

เร็กิวลาร์ไรซ์เซชันแบบอีลาสติก (elastic regularization) (Broit, 1981)

$$\begin{aligned} \tilde{R}^E(u) = & \int_{\Omega} \left( \frac{\mu}{4} \sum_{l,m=1}^2 (\partial_{x_l} u_m(\mathbf{x}) + \partial_{x_m} u_l(\mathbf{x}))^2 \right. \\ & \left. + \frac{\lambda}{2} (\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}))^2 \right) dx, \quad (\lambda \geq 0, \mu > 0) \end{aligned}$$

และเร็กคิวลาร์ไรซ์เซชันที่ใช้การแปรผันรวม (total variation based regularization) (Frohn-Schouf et al., 2006)

$$\tilde{R}^{TV}(\mathbf{u}) = \sum_{l=1}^2 \int_{\Omega} |\nabla u_l(\mathbf{x})| d\mathbf{x}$$

ทำให้ (4) เป็นระบบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เป็นเชิงเส้นอันดับสองซึ่งให้ผลการลงทะเบียนภาพที่มีความแม่นยำน้อยกว่าผลการลงทะเบียนภาพจากระบบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เป็นเชิงเส้นอันดับสี่ซึ่งได้จากเร็กคิวลาร์ไรซ์เซชันที่ใช้อนุพันธ์อันดับสองของ  $\mathbf{u}$  เช่น เร็กคิวลาร์ไรซ์เซชันที่ใช้เคิร์ฟเวเจอร์เชิงเส้น (linear curvature based regularization) (Fischer and Modersitzki, 2003)

$$\tilde{R}^{LC}(\mathbf{u}) = \sum_{l=1}^2 \int_{\Omega} (\Delta u_l(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x}$$

เร็กคิวลาร์ไรซ์เซชันที่ใช้เคิร์ฟเวเจอร์แบบเฉลี่ย (mean curvature based regularization) (Chumchob et al., 2011)

$$\tilde{R}^{MC}(\mathbf{u}) = \sum_{l=1}^2 \int_{\Omega} \left( \nabla \cdot \frac{\nabla u_l}{\sqrt{\beta + |\nabla u_l|^2}} \right)^2 d\mathbf{x} \quad (0 < \beta \leq 1)$$

และเร็กคิวลาร์ไรซ์เซชันที่ใช้เคิร์ฟเวเจอร์แบบเกาส์เซียน (Gaussian curvature based regularization) (Mazlinda et al., 2014)

$$\overline{R}^{GC}(\mathbf{u}) = \sum_{l=1}^2 \tilde{R}^{GC}(u_l),$$

$$\tilde{R}^{GC}(u_l) = \int_{\Omega} \left| \frac{u_{l,x_1x_2} u_{l,x_2x_1} - u_{l,x_1x_1} u_{l,x_2x_2}}{(\beta + |\nabla u_l|^2)^2} \right| d\mathbf{x}$$

จากเร็กคิวลาร์ไรซ์เซชันที่ใช้อนุพันธ์ย่อยของ  $\mathbf{u}$  ที่ถูกกล่าวถึงทั้งหมดข้างต้น เร็กคิวลาร์ไรซ์เซชันที่ใช้เคิร์ฟเวเจอร์แบบเกาส์เซียนมีผลการลงทะเบียนภาพที่น่าเชื่อถือและมีความแม่นยำที่สุด (ดูรายละเอียดการทดสอบประสิทธิภาพของการลงทะเบียนภาพที่ใช้เทอมเร็กคิวลาร์ไรซ์เซชันซึ่งกล่าวถึงข้างต้นได้จาก Mazlinda et al. (2014)) งานวิจัยชิ้นนี้จึงพิจารณาการใช้เร็กคิวลาร์ไรซ์เซชันที่ใช้เคิร์ฟเวเจอร์แบบเกาส์เซียนสำหรับการลงทะเบียนภาพ

เนื่องจากการลงทะเบียนภาพที่ใช้เคิร์ฟเวเจอร์แบบเกาส์เซียน

$$\min_{\mathbf{u}} D(\mathbf{u}) + \alpha \overline{R}^{GC}(\mathbf{u}) \quad (5)$$

เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ใหม่ที่ถูกตั้งขึ้นในปี ค.ศ. 2014 (พ.ศ. 2557) จึงมีผู้สนใจศึกษาเพื่อพัฒนาวิธีการหาผลเฉลยของปัญหาเชิงแปรผัน (5) ไม่มากเท่าที่คณะผู้วิจัยของงานวิจัยนี้ทราบ ในขณะนี้ไม่มีเพียง Mazlinda et al. (2014) เท่านั้นที่ได้พัฒนาวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาเชิงแปรผัน (5) ซึ่งสามารถกล่าวสรุปพอสังเขปได้ ดังนี้

เริ่มต้นจากการแนะนำตัวแปรใหม่  $\mathbf{q}_1 = \nabla u_1$  และ  $\mathbf{q}_2 = \nabla u_2$  จากนั้นใช้ตัวแปรใหม่ทั้งสองเพื่อทำการแปลงปัญหาการหาค่าต่ำสุดแบบไม่มีเงื่อนไขบังคับ (5) ไปเป็นปัญหาการหาค่าต่ำสุดแบบมีเงื่อนไขบังคับ

$$\min_{\mathbf{u}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2} J(\mathbf{u}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = D(\mathbf{u}) + \alpha \sum_{l=1}^2 \tilde{R}^{GC}(\mathbf{q}_l) \quad (6)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{q}_1 = \nabla u_1, \mathbf{q}_2 = \nabla u_2$$

ภายหลังจากใช้วิธีการลากรางเจียนแบบต่อเติม (augmented Lagrangian method: ALM) ปัญหาการหาค่าต่ำสุดแบบมีเงื่อนไขบังคับ (6) สามารถถูกเขียนได้ในรูปของปัญหาการหาค่าต่ำสุดแบบไม่มีเงื่อนไขบังคับ

$$\min_{\mathbf{u}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2} L(\mathbf{u}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2; \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) \quad (7)$$

โดยที่

$$L(\mathbf{u}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2; \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) = D(\mathbf{u}) + \alpha \sum_{l=1}^2 \tilde{R}^{GC}(\mathbf{q}_l) + \sum_{l=1}^2 \int_{\Omega} \boldsymbol{\mu}_l \cdot (\mathbf{q}_l - \nabla u_l) d\mathbf{x} + \frac{r}{2} \sum_{l=1}^2 \int_{\Omega} (\mathbf{q}_l - \nabla u_l)^2 d\mathbf{x} \quad (8)$$

แทนฟังก์ชันนัลลากรางเจียนแบบต่อเติม (augmented Lagrangian functional) ที่เกี่ยวข้องกับ (6)  $\boldsymbol{\mu}_l \in \mathbb{R}^2$  ( $l = 1, 2$ ) แทนตัวคูณลากรางจ์ (Lagrange multiplier) และ  $r > 0$

เนื่องจากจุดต่ำสุด (minimizer point) ของ (6) เป็นจุดหยุดนิ่ง (saddle point) ของ (8) เราจึงจำเป็นต้องพัฒนาวิธีการเชิงตัวเลขเพื่อหาจุดหยุดนิ่งของ (8)

แต่เนื่องจากตัวแปร  $u, q_1, q_2$  ใน (8) มีความเกี่ยวเนื่องกัน ดังนั้นการคำนวณค่าที่เหมาะสมที่สุดของ  $u, q_1, q_2$  ไปในคราวเดียวกัน นั้นทำได้ยาก Mazlinda et al. (2014) จึงใช้เทคนิคการแยก (decomposition technique) เพื่อแก้ปัญหา (7) โดยแบ่งปัญหา (7) ออกไปเป็นปัญหาการหาค่าต่ำที่สุด 2 ปัญหาย่อยที่ใช้ค้นหาตัวแปร  $q_1, q_2$  และ  $u$  ดังนี้

$$\min_{q_1, q_2} \alpha \sum_{l=1}^2 R^{GC}(q_l) + \sum_{l=1}^2 \int_{\Omega} \mu_l \cdot q_l dx + \frac{\alpha}{2} \sum_{l=1}^2 \int_{\Omega} (q_l - \nabla u_l)^2 dx \quad (9)$$

$$\min_u D(u) - \sum_{l=1}^2 \int_{\Omega} \mu_l \cdot \nabla u_l dx + \frac{\alpha}{2} \sum_{l=1}^2 \int_{\Omega} (q_l - \nabla u_l)^2 dx \quad (10)$$

หลังจากนั้นจึงใช้กระบวนการหาค่าต่ำที่สุดแบบสลับ (alternating minimization procedure) กับปัญหาย่อยใน (9) และ (10) พร้อมกับการปรับปรุงตัวคูณลากรางจ์จนกระทั่งผลการลงทะเบียนภาพเป็นที่น่าพอใจหรือลำดับของผลเฉลย  $u$  เข้าสู่จึงหยุดกระบวนการ

ถึงแม้ว่าการแก้ปัญหาย่อยใน (9) และ (10) ที่พัฒนาโดย Mazlinda et al. (2014) ประกอบด้วยการแก้สมการออยเลอร์-ลากรางจ์ที่เป็นระบบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสองซึ่งมีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (analytical solution) สำหรับ  $q_1, q_2$  และผลเฉลยเชิงตัวเลขแบบเร็ว (fast numerical solution) สำหรับ  $u$  แต่กระบวนการหาค่าต่ำที่สุดแบบสลับจำเป็นต้องใช้เวลาในการประมวลผลค่อนข้างมากเนื่องจากต้องคำนวณหาตัวแปรไม่ทราบค่าถึง 6 ตัวแปร ได้แก่  $u = (u_1, u_2)^T$ ,  $q_1 = (q_{1,1}, q_{1,2})^T$ ,  $q_2 = (q_{2,1}, q_{2,2})^T$  และตัวคูณลากรางจ์อีก 4 ตัว ได้แก่  $\mu_1 = (\mu_{1,1}, \mu_{1,2})^T$ ,  $\mu_2 = (\mu_{2,1}, \mu_{2,2})^T$  รวมไปถึงค่าคงตัว  $r > 0$

เพื่อลดความยุ่งยากในการแก้ปัญหาเชิงแปรผัน (5) จาก ALM งานวิจัยชิ้นนี้นำเสนอวิธีการโดยตรงจากการพิจารณาค่าตอบเชิงตัวเลขของสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาเชิงแปรผัน (5)

$$\begin{cases} f_1(u) + \alpha A_1^{GC}(u) = 0 \\ f_2(u) + \alpha A_2^{GC}(u) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

ภายใต้เงื่อนไขค่าขอบ  $\nabla u_l \cdot n = 0$  เมื่อ  $n$  แทนเวกเตอร์ตั้งฉากกับทิศทางซึ่งออกจากขอบของภาพ  $\partial\Omega$  ในที่นี้

$$\begin{aligned} A_l^{GC}(u) &= \nabla \cdot \left( \frac{4|u_{l,1,2}| u_{l,2,1} - u_{l,1,1} u_{l,2,2}}{N_l} \nabla u_l \right) + \nabla \cdot \mathbf{B}_{l,1} + \nabla \cdot \mathbf{B}_{l,2} \\ &= \nabla \cdot \mathbf{V}_l, \quad \mathbf{V}_l = \left( \frac{4|u_{l,1,2}| u_{l,2,1} - u_{l,1,1} u_{l,2,2}}{N_l^2} \nabla u_l \right) + \mathbf{B}_{l,1} + \mathbf{B}_{l,2} \\ \mathbf{B}_{l,1} &= \left( \left( -\frac{S_l \mu_{l,2,2}}{N_l} \right)_{x_1}, \left( \frac{S_l \mu_{l,1,2}}{N_l} \right)_{x_1} \right) \\ \mathbf{B}_{l,2} &= \left( \left( \frac{S_l \mu_{l,2,1}}{N_l} \right)_{x_2}, \left( -\frac{S_l \mu_{l,1,1}}{N_l} \right)_{x_2} \right) \\ S_l &= \text{sign}(u_{l,1,2} u_{l,2,1} - u_{l,1,1} u_{l,2,2}) \end{aligned}$$

และ  $N_l = |\nabla u_l|^2 + \beta$

### วัตถุประสงค์การวิจัย

งานวิจัยชิ้นนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อนำเสนอวิธีการเดินเวลาดังไม่ชัดแจ้งที่ถูกทำให้เสถียร (stabilized semi-implicit time marching scheme) สำหรับเพิ่มประสิทธิภาพการลงทะเบียนภาพเคิร์ฟเวอร์แบบเกาส์เซียน

### วิธีการวิจัย

กำหนดให้  $\Omega^h = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \mathbf{x} = (x_1, x_2)^T\}$   
 $= \left( \frac{(2i-1)h_{x_1}}{2}, \frac{(2j-1)h_{x_2}}{2} \right)^T, 1 \leq i \leq n_{x_1}, 1 \leq j \leq n_{x_2}$   
แทนโดเมนแบบดิสครีต (discretized domain) โดยที่  $n = n_{x_1} = n_{x_2}$  และ  $h = h_{x_1} = h_{x_2}$  แทนจำนวนกริดและระยะกริดในทิศทาง  $x_1$  และ  $x_2$  ตามลำดับ  $(u_l)_{i,j} = u_l(x_1, x_2)$  แทนฟังก์ชันกริด (grid function) สำหรับ  $l = 1, 2$  หลังจากใช้การประมาณไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์กับ (11) จะได้

$$\begin{cases} f_1(u)_{i,j} + \alpha A_1^{GC}(u)_{i,j} = 0 \\ f_2(u)_{i,j} + \alpha A_2^{GC}(u)_{i,j} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

โดยที่

$$A_i^{GC}(\mathbf{u})_{i,j} = (\nabla \cdot \mathbf{V}_i)_{i,j} = \frac{(\mathbf{V}_{i,1})_{i+1,j} - (\mathbf{V}_{i,1})_{i,j}}{h} + \frac{(\mathbf{V}_{i,2})_{i,j+1} - (\mathbf{V}_{i,2})_{i,j}}{h}$$

$$f_1(\mathbf{u})_{i,j} = ((T_u)_{i,j} - (R)_{i,j}) \left( \frac{(T_u)_{i-1,j} - (T_u)_{i+1,j}}{2h} \right)$$

$$f_2(\mathbf{u})_{i,j} = ((T_u)_{i,j} - (R)_{i,j}) \left( \frac{(T_u)_{i,j-1} - (T_u)_{i,j+1}}{2h} \right)$$

$$(T_u)_{i,j} = T(i + (u_1)_{i,j}, j + (u_2)_{i,j})$$

$$(\mathbf{u})_{i,j} = ((u_1)_{i,j}, (u_2)_{i,j})^T$$

ภายใต้เงื่อนไขค่าขอบแบบดิสครีต

$$(u_1)_{1,j} = (u_1)_{2,j}, \quad (u_1)_{n,i} = (u_1)_{n-1,i}$$

$$(u_1)_{i,1} = (u_1)_{i,2}, \quad (u_1)_{i,n} = (u_1)_{i,n-1}$$

เนื่องจาก (11) เป็นระบบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เป็นเชิงเส้นอันดับสี่ วิธีการเดินเวลา (time marching method) จึงเป็นทางเลือกที่เหมาะสมสำหรับการคำนวณผลเฉลยเชิงตัวเลข เมื่อทำการแนะนำตัวแปรเวลาสังเคราะห์ (artificial time variable)  $t \in [0, \infty)$  และแปลงระบบสมการ (11) เป็นระบบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบพาราโบลิกจะได้

$$\begin{cases} \partial_t u_1(\mathbf{x}; t) + f_1(\mathbf{u}(\mathbf{x}; t)) + \alpha A_1^{GC}(\mathbf{u}(\mathbf{x}; t)) = 0 \\ \partial_t u_2(\mathbf{x}; t) + f_2(\mathbf{u}(\mathbf{x}; t)) + \alpha A_2^{GC}(\mathbf{u}(\mathbf{x}; t)) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

โดยที่  $\mathbf{u}(\mathbf{x}; t) = (u_1(\mathbf{x}; t), u_2(\mathbf{x}; t))^T$

เนื่องจากรูปแบบการเดินเวลาแบบชัดแจ้ง (explicit time marching scheme) สำหรับ (13) ให้ผลเฉลยที่ลู่เข้าและไม่เสถียรสำหรับขั้นเวลา  $\tau > 0$  ที่มีขนาดใหญ่ งานวิจัยชิ้นนี้จึงนำเสนอรูปแบบการเดินเวลาแบบกึ่งไม่ชัดแจ้ง (semi-implicit time marching scheme: SITM)

$$\begin{cases} \frac{u_1(\mathbf{x}; t_{k+1}) - u_1(\mathbf{x}; t_k)}{\tau} + f_1(\mathbf{u}(\mathbf{x}; t_k)) + \alpha \bar{A}_1^{GC}(\mathbf{u}(\mathbf{x}; t_{k+1})) = 0 \\ \frac{u_2(\mathbf{x}; t_{k+1}) - u_2(\mathbf{x}; t_k)}{\tau} + f_2(\mathbf{u}(\mathbf{x}; t_k)) + \alpha \bar{A}_2^{GC}(\mathbf{u}(\mathbf{x}; t_{k+1})) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

โดยที่

$$\bar{A}_i^{GC}(\mathbf{u}(\mathbf{x}; t_{k+1})) = \nabla \cdot (D_{i,1}(u_i(\mathbf{x}; t_k)) \nabla u_i(\mathbf{x}; t_{k+1})) + \nabla \cdot \bar{\mathbf{B}}_i(\mathbf{x}; t_k)$$

$$D_i(u_i(\mathbf{x}; t_k)) = \frac{4|u_{i,1,2}(\mathbf{x}; t_k) u_{i,2,1}(\mathbf{x}; t_k) - u_{i,1,1}(\mathbf{x}; t_k) u_{i,2,2}(\mathbf{x}; t_k)|}{N_i^3(\mathbf{x}; t_k)}$$

$$\bar{\mathbf{B}}_i(\mathbf{x}; t_k) = \mathbf{B}_{i,1}(\mathbf{x}; t_k) + \mathbf{B}_{i,2}(\mathbf{x}; t_k)$$

หลังจากทำการดิสครีตไทซ์ (14) ด้วยการประมาณไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ดังที่นำเสนอในตอนต้นพร้อมกับจัดเทอมใหม่จะได้

$$\begin{cases} (u_1^{k+1})_{i,j} + \alpha \tau \nabla \cdot (D_1(u_1^k) \nabla u_1^{k+1})_{i,j} = (u_1^k)_{i,j} \\ \quad - \tau [f_1(\mathbf{u}^k)_{i,j} + \alpha \nabla \cdot \bar{\mathbf{B}}_1^k] \\ (u_2^{k+1})_{i,j} + \alpha \tau \nabla \cdot (D_2(u_2^k) \nabla u_2^{k+1})_{i,j} = (u_2^k)_{i,j} \\ \quad - \tau [f_2(\mathbf{u}^k)_{i,j} + \alpha \nabla \cdot \bar{\mathbf{B}}_2^k] \end{cases} \quad (15)$$

ซึ่งระบบสมการ (15) สามารถถูกเขียนในรูปของระบบสมการเมทริกซ์-เวกเตอร์ได้เป็น

$$\begin{cases} (\mathbf{I} + \mathbf{A}_1^k) \mathbf{u}_1^{k+1} = \mathbf{b}_1^k \\ (\mathbf{I} + \mathbf{A}_2^k) \mathbf{u}_2^{k+1} = \mathbf{b}_2^k \end{cases} \quad (16)$$

โดยที่  $\mathbf{I}$  แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด  $n^2 \times n^2$   $\mathbf{A}_i^k$  เป็นเมทริกซ์ที่มากไปด้วยเลขศูนย์ (sparse matrix) ขนาด  $n^2 \times n^2$  ที่กำหนดจากเทอมที่สองทางซ้ายมือ และ  $\mathbf{b}_i^k \in \mathbb{R}^{n^2}$  เป็นเวกเตอร์ที่กำหนดจากเทอมทางขวามือของ (15) ตามลำดับ

ถึงแม้ว่าแต่ละขั้นเวลาที่  $k+1$  ระบบสมการเชิงเส้นใน (16) สามารถแก้ได้โดยวิธีการทำซ้ำแบบเร็วด้วยการทำซ้ำเพียงไม่กี่ครั้ง เช่น วิธีการเกรเดียนต์สังยุคแบบปรับสภาวะ (preconditioned conjugate gradient (PCG) method) แต่อุปสรรคในการคำนวณเชิงตัวเลขจะเกิดขึ้นจากเทอมสัมประสิทธิ์  $D_i(u_i^k)$  ซึ่งมีขนาดใหญ่มาจนครอบงำ (dominate) เทอมอื่นๆ ใน (15) บนบริเวณที่  $|\nabla u_i|^2 \approx 0$  และ  $\beta < 1$  ส่งผลให้การใช้ขั้นเวลา  $\tau$  ที่มีขนาดใหญ่จะทำให้รูปแบบการเดินเวลาชนิดนี้ไม่เสถียร

เพื่อปรับปรุงความเสถียรของรูปแบบการเดินเวลาแบบกึ่งไม่ชัดแจ้ง (15) งานวิจัยนี้นำเสนอเทอมเสริมความเสถียร (stabilizing term) โดยใช้เทคนิคการแยกภาวะคอนเวกซ์ (convexity-splitting technique) ที่พัฒนาใน (Chumchob et al., 2011) ดังนั้น ณ ขั้นเวลาที่  $k+1$  รูปแบบการเดินเวลาแบบกึ่งไม่ชัดแจ้ง (15) สามารถถูกปรับปรุงได้เป็น

$$\begin{cases} (u_1^{k+1})_{i,j} + \gamma_1 \tau F(u_1^{k+1})_{i,j} + \alpha \tau \nabla \cdot (D_1(u_1^k) \nabla u_1^{k+1})_{i,j} = \gamma_1 \tau F(u_1^k)_{i,j} \\ \quad + (u_1^k)_{i,j} - \tau [f_1(u_1^k)_{i,j} + \alpha \nabla \cdot \mathbf{B}_1^k] \\ (u_2^{k+1})_{i,j} + \gamma_2 \tau F(u_2^{k+1})_{i,j} + \alpha \tau \nabla \cdot (D_2(u_2^k) \nabla u_2^{k+1})_{i,j} = \gamma_2 \tau F(u_2^k)_{i,j} \\ \quad + (u_2^k)_{i,j} - \tau [f_2(u_2^k)_{i,j} + \alpha \nabla \cdot \mathbf{B}_2^k] \end{cases} \quad (17)$$

โดยที่  $\gamma_l > 0$  และ  $F(u_l)$  เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ (differential operator) ที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันนัลแบบคอนเวกซ์ (convex functional) ซึ่งในที่นี้ได้เลือกใช้  $\int_{\Omega} \sqrt{|\nabla u_l|^2 + \beta} dx$  เนื่องจากสามารถแก้ปัญหาการลงทะเบียนภาพที่ต้องการการแปลงรูปทั้งแบบเรียบและแบบไม่เรียบได้ดี เพราะฉะนั้น  $F(u_l) = \nabla \cdot \frac{\nabla u_l}{\sqrt{|\nabla u_l|^2 + \beta}}$  เราจะเรียกกระบวนการเดินเวลาใน (17) ว่ารูปแบบการเดินเวลาถึงไม่ขัดแย้งซึ่งถูกทำให้เสถียร (stabilized semi-implicit time marching scheme: SSITM)

ในทำนองเดียวกัน ระบบสมการ (17) สามารถถูกเขียนในรูประบบสมการเมทริกซ์-เวกเตอร์ได้เป็น

$$\begin{cases} (\mathbf{I} + \bar{\mathbf{A}}_1^k) \mathbf{u}_1^{k+1} = \bar{\mathbf{b}}_1^k \\ (\mathbf{I} + \bar{\mathbf{A}}_2^k) \mathbf{u}_2^{k+1} = \bar{\mathbf{b}}_2^k \end{cases} \quad (18)$$

โดยที่  $\bar{\mathbf{A}}_l^k$  เป็นเมทริกซ์ที่มากไปด้วยเลขศูนย์ขนาด  $n^2 \times n^2$  ที่กำหนดจากเทอมที่สองและสามทางซ้ายมือ และ  $\bar{\mathbf{b}}_l^k \in \mathbb{R}^{n^2}$  เป็นเวกเตอร์ที่กำหนดจากเทอมทางขวามือของ (17) ตามลำดับ

### ผลการวิจัย

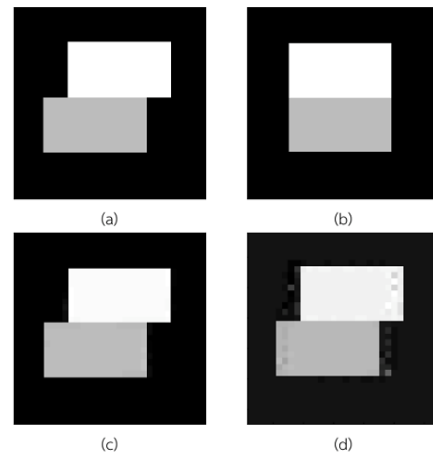
การทดลองเชิงตัวเลขได้ถูกออกแบบเพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของการลงทะเบียนภาพที่ใช้เคิร์ฟเวเจอร์แบบเกาส์เซียนโดยใช้วิธีการเดินเวลาแบบ SITM และ SSITM ทั้งนี้ความแม่นยำของวิธีการทั้งสองจะถูกตรวจวัดโดยร้อยละของความแตกต่างสัมพัทธ์ระหว่างภาพที่กำลังถูกลงทะเบียน  $R$  และ  $T_{u^k}$  ซึ่งนิยามโดย

$$\text{RelSSD}(k) = \frac{\sum_{i,j} ((T_{u^k})_{i,j} - (R)_{i,j})}{\sum_{i,j} ((T)_{i,j} - (R)_{i,j})} \times 100$$

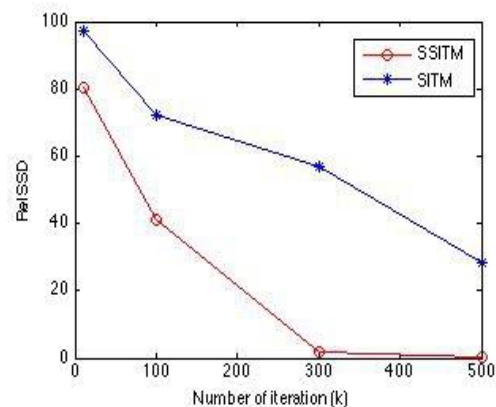
การทดลองเชิงตัวเลขทั้งหมดจะถูกหยุดถ้าเกณฑ์การหยุดข้อใดข้อหนึ่งต่อไปเป็นจริง

1.  $\text{RelSSD}(k) < 0.05$
2.  $|\text{RelSSD}(k+1) - \text{RelSSD}(k)| < 10^{-16}$
3.  $k \geq 10000$

ในทุกการทดลองเชิงตัวเลขได้ถูกประมวลผลด้วยโปรแกรม MATLAB R2011a ด้วยระบบปฏิบัติการ OS X Mavericks บนเครื่องคอมพิวเตอร์แบบพกพา MacBook Pro CPU 2.4GHz และ RAM 8 GB

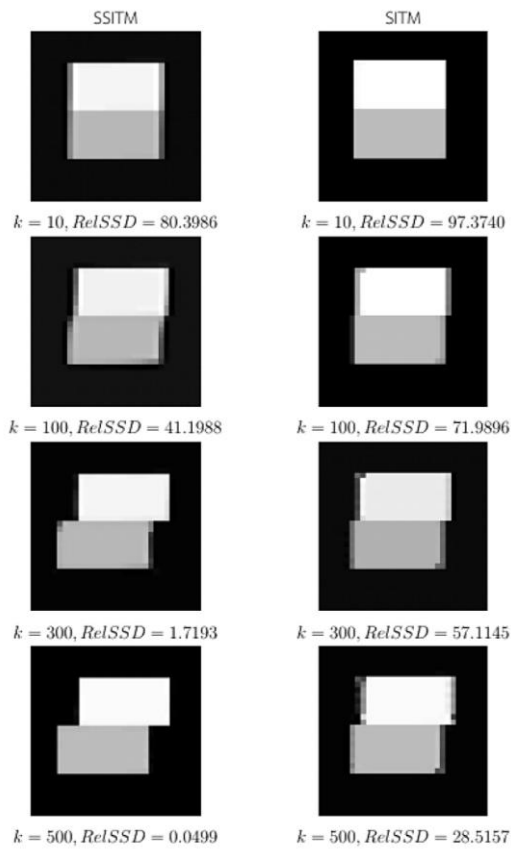


ภาพที่ 1 แสดงปัญหาการลงทะเบียนภาพสังเคราะห์ที่ต้องการการแปลงรูปแบบไม่เรียบ โดย (a) แทนภาพอ้างอิง (b) แทนภาพแม่แบบ (c) และ (d) แทนผลการลงทะเบียนภาพโดยวิธีการ SSITM และ SITM ตามลำดับ โดยใช้พารามิเตอร์ดังนี้  $\alpha = 10^{-6}, \tau = 10^{-2}, \beta = 10^{-2}, \gamma_1 = \gamma_2 = 1000$



ภาพที่ 2 แสดงการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการ SSITM และ SITM ในการลงทะเบียนภาพสังเคราะห์ในภาพที่ 1 (a)-(b) เพื่อให้  $\text{RelSSD}(k)$  ต่ำกว่า 0.05 (ความแตกต่างระหว่างภาพที่กำลังถูกลงทะเบียน  $R$  และ  $T_{u^k}$  น้อยกว่าร้อยละ 5)





ภาพที่ 3 แสดงผลการลงทะเบียนภาพโดยวิธีการ SSITM และ SITM เมื่อ  $k = 10, 100, 300, 500$

จากภาพที่ 1-3 เห็นได้ชัดว่าวิธีการ SSITM ให้ผลการลงทะเบียนภาพที่รวดเร็ว น่าเชื่อถือ และแม่นยำกว่าวิธีการ SITM

### อภิปรายและสรุปผลการวิจัย

ผลการทดลองเชิงตัวเลขบนภาพสังเคราะห์ชี้ให้เห็นว่าการลงทะเบียนภาพเคิร์ฟเวเจอร์แบบเกาส์เซียนโดยใช้วิธีการเดินเวลาที่ไม่มีขีดจำกัดที่ถูกทำให้เสถียรให้ผลการลงทะเบียนภาพที่มีประสิทธิภาพสูงกว่าและมีความเร็วมากกว่าวิธีการเดินเวลาที่ไม่มีขีดจำกัดอย่างมีนัยสำคัญ นอกจากนี้ผลการวิจัยที่ได้ยังสามารถนำไปต่อยอดเชิงพาณิชย์สำหรับผลิตภัณฑ์คอมพิวเตอร์เพื่อทำการลงทะเบียนภาพทางการแพทย์สำหรับช่วยในการตรวจวินิจฉัยโรค

### กิตติกรรมประกาศ

การวิจัยนี้ได้รับความสนับสนุนจากภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร และโครงการพัฒนาและส่งเสริมผู้มีความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

### เอกสารอ้างอิง

Broit C. Optimal registration of deformed image. Ph.D. thesis, Computer and Information Science. United States: University of Pennsylvania; 1981.

Chumchob N, Chen K, Brito-Loeza C. 2011. A fourth order variational image registration model and its fast multigrid algorithm. SIAM Multiscale Modeling and Simulation. 9(1): 89-128.

Fischer B, Modersitzki J. 2002. Fast diffusion registration. Contemporary Mathematics. 313: 117-129.

Fischer B, Modersitzki J. 2003. Curvature based image registration. Journal of Mathematics Imaging and Vision. 18: 81-85.

Frohn-Schouf C, Henn S, Homke L, Witsch K. Total variation based image registration. The International Conference on PDE Based Image Processing and Related Inverse Problems Series: Mathematics and Visualization, Springer Verlag. p.305-323.

Mazlinda I, Chen K, Brito-Loeza C. 2014. A novel variational model for image registration using Gaussian curvature. Geometry Imaging and Computing. 1(4): 417-446.

Modersitzki J. Numerical method for image registration. Oxford University. 2004.