

วิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์สำหรับสมการซิบอร์-ชาแบท และสมการอื่นที่เกี่ยวข้อง

The Sech Method for Solving the Zhiber-Shabat Equation and Other related Equations

พรทิพย์ พลาชิวะ (Porntip Palacheewa)* ดร. วรณัทนา พรหมสวาย (Dr. Wantana Promsuay)**

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ ได้ใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์เพื่อสร้างผลเฉลยคลื่นเคลื่อนที่ของสมการซิบอร์-ชาแบท และสมการที่เกี่ยวข้อง เช่น สมการหลุยวีว สมการไฮเพอร์โบลิกไซน์-กอร์ดอน และสมการคอด-บูลลอจ-มิกฮาโลฟ โดยวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์นั้น จากการยืนยันด้วยวิธีทดลองที่มีประสิทธิภาพ ซึ่งได้ผลเฉลยของคลื่นเคลื่อนที่ ซึ่งผลเฉลยเหล่านี้มีความสำคัญสำหรับปัญหาทางกายภาพบางปัญหาที่เป็นไปได้ในสภาพอันแท้จริงอย่างมีนัยสำคัญ

ABSTRACT

In this paper, the sech method is used to construct many travelling wave solutions for the Zhiber-Shabat equation and other related equations: Liouville equation, sinh-Gordon equation and Dodd-Bullough-Mikhailov equation. The power of the proposed methods is confirmed. These solutions may be important of significance for the explanation of some practical physical problem.

คำสำคัญ: วิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ สมการซิบอร์-ชาแบท ผลเฉลยคลื่นเคลื่อนที่

Key Words: The Sech method, Zhiber-Shabat equation, Travelling wave solutions

* มหบัณฑิต หลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา

** ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

เนื่องจากสมการไม่เชิงเส้นนั้นนับเป็นสมการที่ใช้กันอย่างแพร่หลาย ในการใช้จำลอง และอธิบายความซับซ้อนของปรากฏการณ์ต่าง ๆ ทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ เช่น กลศาสตร์ของไหล จลศาสตร์เคมี และแบบจำลองประชากร เป็นต้น ดังนั้นการหาคำตอบของสมการไม่เชิงเส้นนั้น นับว่าเป็นสิ่งสำคัญอย่างยิ่ง เพื่อให้เราบรรลุถึงเป้าหมายของการศึกษาในเรื่องดังกล่าว

สำหรับปรากฏการณ์ข้างต้น มักเป็นปัญหาที่อยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ซึ่งไม่มีรูปแบบในการหาผลเฉลยที่แน่นอน แต่ได้มีผู้คิดค้นวิธีการหาคำตอบของปัญหาเหล่านั้นในช่วงไม่กี่ปีมานี้ไว้มากมายหลายวิธีแตกต่างกันไป เช่น วิธีการแปลงเชิงเส้นคู่ (bilinear transformation) (Hirota, 1980) วิธีไซน์-โคไซน์ (sine-cosine method) (Wazwaz, 2004) วิธีเอ็กซ์โพเนนเชียลฟังก์ชัน (exponential function method) (He & Wu, 2006) วิธีเพอร์เทอร์เบชันแบบเอกฐาน (homotopy perturbation method) (Ganji & Rafei, 2006) เป็นต้น

อีกวิธีหนึ่งที่น่าสนใจและมีประสิทธิภาพในการหาผลเฉลยของสมการอนุพันธ์ย่อย คือ วิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ (tanh method) และวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ (sech method) (Malfliet, 1992) ซึ่งถือว่าเป็นเทคนิคที่ถูกอ้างอิงและใช้กันอย่างแพร่หลายในงานวิจัยต่าง ๆ ทั่วโลก ทั้งยังได้ถูกพัฒนาอย่างต่อเนื่อง รวบรวมให้เป็นระบบเพื่อง่ายต่อการนำไปใช้

จากการศึกษางานวิจัยต่าง ๆ นั้น พบว่าได้มีผู้วิจัยได้ทำการศึกษาและหาผลเฉลยของสมการซิบอร์-ชาแบท (the Zhiber-Shabat equation) อีกทั้งวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์เพื่อหาผลเฉลยของสมการต่าง ๆ โดย

ปี ค.ศ. 2006 วาซวาซ (Wazwaz) ได้ทำการศึกษาและนำเสนอวิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ วิธีขยายไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ หาผลเฉลยของสมการ

สมการซิบอร์-ชาแบท และสมการอื่นที่เกี่ยวข้องกับสมการซิบอร์-ชาแบท เพื่อหาผลเฉลยคลื่นเคลื่อนที่

ปี ค.ศ.2007 วาซวาซ (Wazwaz) ได้หาผลเฉลยของสมการโคโนเปิลเช็งโก-ดูโบรสกี (2+1) มิติ (the (2+ 1)-dimensional Konopelchenko–Dubrovsky equation) โดยวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์

ปี ค.ศ.2007 วาซวาซ (Wazwaz) ได้ใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์-ไฮเพอร์โบลิกโคแทนเจนต์ และวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ สำหรับสมการจูเลนต์-มิโอเดก (Jaulent–Mioedek equation)

ปี ค.ศ.2008 เกนจิและอับดุลลาซาเด (Ganji and Abdollahzadeh) หาผลเฉลยแม่นยำตรงสำหรับสมการเควีวี่อันดับ 7 ของแล็กซ์ (Lax's seventh-order KdV) โดยวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ และวิธีเอ็กซ์โพเนนเชียลฟังก์ชันตรรกยะ

สินทรัพย์ (2552) ได้ศึกษาการใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ในการหาผลเฉลยของสมการเควีวี่ปรับปรุง และสมการเควีวี่ประกอบ

ทั้งนี้ทางผู้วิจัยมีความสนใจที่จะใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ในการหาผลเฉลยของสมการซิบอร์-ชาแบท และสมการอื่นที่เกี่ยวข้องกับสมการซิบอร์-ชาแบท เพื่อหาผลเฉลยคลื่นเคลื่อนที่

จากการศึกษางานวิจัย พบว่ารูปแบบของสมการเส้นซิบอร์-ชาแบท (the Zhiber-Shabat equation) มีรูปแบบดังนี้

$$u_{xt} + pe^u + qe^{-u} + re^{-2u} = 0$$

เมื่อ p, q และ r เป็นค่าคงตัวที่ไม่เจาะจง สำหรับค่า $q = r = 0$ ของสมการ (1.1) จะเป็นสมการ หลุยวิลล์ (the Liouville equation) สำหรับค่า $r = 0$ ของสมการ (1.1) จะเป็นสมการไฮเพอร์โบลิกไซน์-กอร์ดอน (the sinh-Gordon equation) และ สำหรับ $q = 0$ จะเป็นสมการดอด-บูล-ลอจ-มิคคาลอฟ (the well-know Dodd-Bul-lough-Mikhailov equation)

สมการดังที่กล่าวมานับเป็นสมการที่ใช้กันอย่างแพร่หลาย อธิบายความซับซ้อนของปรากฏการณ์ต่าง ๆ ทางวิทยาศาสตร์ เช่น การเคลื่อนไหวในสถานะ

ของแข็ง การเคลื่อนของคลื่นที่ทัศนศาสตร์ไม่เชิงเส้น การเคลื่อนไหวส่วนที่เป็นของเหลวในเลือด การเคลื่อนไหวของของเหลว การคำนวณทางชีววิทยา การเคลื่อนที่ของผลึก การเคลื่อนไหวของรอยหักงอเกี่ยวกับการเคลื่อนไหวทางเคมีและทฤษฎีการเปลี่ยนแปลงอื่นๆ

การหาผลเฉลยคลื่นเคลื่อนที่ของสมการไม่เชิงเส้นซิบอร์-ชาแบท โดยวิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ (tanh method) (Wazwaz, 2006) จากการทำงานนี้ทำให้ได้ผลเฉลยคลื่นเคลื่อนที่มีความสมบูรณ์ดี ในการทำงานวิจัยในครั้งนี้จะทำการหาผลเฉลยคลื่นเคลื่อนที่ของสมการไม่เชิงเส้นซิบอร์-ชาแบท ซึ่งเป็นวิธีที่แตกต่างไปแต่ยังคงมีประสิทธิภาพ

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. ศึกษาวิธีการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยโดยใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์
2. ใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์หาผลเฉลยสมการซิบอร์-ชาแบทและสมการอื่นที่เกี่ยวข้อง

วิธีดำเนินการวิจัย

การหาผลเฉลยสมการซิบอร์-ชาแบท (the Zhiber-Shabat equation) โดยวิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ ผู้วิจัยได้ดำเนินการขั้นตอนดังนี้

1. ศึกษาวิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์
2. เลือกสมการที่ต้องการหาผลเฉลย คือ สมการซิบอร์-ชาแบท และสมการอื่นที่เกี่ยวข้อง
3. ใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์หาผลเฉลยสมการซิบอร์-ชาแบท และสมการอื่นที่เกี่ยวข้อง

วิธีไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์

พิจารณารูปแบบทั่วไปของสมการไม่เชิงเส้นดังสมการ

$$P(u, u_t, u_x, u_{xx}, \dots) = 0$$

1. กำหนดตัวแปรคลื่น $\xi = x - ct$ จะได้

$$u(x, t) = U(\xi)$$

โดยที่คำตอบคลื่น $U(\xi)$ นั้นคลื่นที่ด้วยความเร็ว c แปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ดังสมการ

$$P(U, U', U'', \dots) = 0$$

2. ถ้าทุกพจน์ของผลลัพธ์ในสมการเชิงอนุพันธ์มีอนุพันธ์ของ ξ ให้อินทิเกรตสมการ และกำหนดให้ค่าคงที่ของการอินทิเกรตเป็นศูนย์ แล้วจัดรูปสมการ

3. กำหนดตัวแปรอิสระใหม่คือ

$$Y = \operatorname{sech}(\mu\xi)$$

แล้วทำการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันอันดับต่างๆ

4. กำหนดให้

$$U(\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^M a_k Y^k$$

5. หาค่าพารามิเตอร์ M จากการนำพจน์เชิงเส้นที่มีอนุพันธ์อันดับสูงสุดของผลลัพธ์เปรียบเทียบกับอันดับสูงสุดในพจน์ที่ไม่เชิงเส้น โดยการเทียบสัมประสิทธิ์กำลังของ Y ในสมการของผลลัพธ์ โดยใช้ M นี้กับสมการอนุกรมกำลังของ Y จะทำให้เราได้คำตอบวิเคราะห์ที่อยู่ในรูปแบบปิด

สมการซิบอร์-ชาแบท (the Zhiber-Shabat equation)

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้นที่เราต้องการหาผลเฉลยในงานวิจัยนี้ คือ สมการซิบอร์-ชาแบท มีรูปแบบดังสมการ

$$u_{xt} + pe^u + qe^{-u} + re^{-2u} = 0$$

เมื่อ x, t เป็นตัวแปรอิสระ u เป็นตัวแปรตาม และ p, q และ r เป็นพารามิเตอร์ใด ๆ

สมการหลุยวีว (the Liouville equation)

เมื่อกำหนดให้ $q = r = 0$ ในสมการซิบอร์-ชาแบท จะได้เป็นสมการหลุยวีว มีรูปแบบ ดังสมการ

$$u_{xt} + pe^u = 0$$

เมื่อ x, t เป็นตัวแปรอิสระ u เป็นตัวแปรตาม และ p เป็นพารามิเตอร์ใด ๆ

สมการไฮเพอร์โบลิกไซน์-กอร์ดอน (The sinh-Gordon equation)

เมื่อกำหนดให้ $r = 0$ ในสมการซิเบอร์-ซาแบท จะได้เป็นสมการไฮเพอร์โบลิกไซน์-กอร์ดอน มีรูปแบบ ดังสมการ

$$u_{xt} + pe^u + qe^{-u} = 0$$

เมื่อ x, t เป็นตัวแปรอิสระ u เป็นตัวแปรตาม และ p, q เป็นพารามิเตอร์ใด ๆ

สมการดอด-บูลลอจ-มิไคโลฟ (The Dodd-Bullough-Mikhailov equation)

เมื่อกำหนดให้ $q = 0$ ในสมการซิเบอร์-ซาแบท จะได้เป็นสมการดอด-บูลลอจ-มิไคโลฟ มีรูปแบบ ดังสมการ

$$u_{xt} + pe^u + re^{-2u} = 0$$

เมื่อ x, t เป็นตัวแปรอิสระ u เป็นตัวแปรตาม และ p, r เป็นพารามิเตอร์ใด ๆ

สมการซิเบอร์-ซาแบท และสมการอื่นที่เกี่ยวข้องดังที่กล่าวมานับเป็นสมการที่ใช้กันอย่างแพร่หลาย อธิบายความซับซ้อนของปรากฏการณ์ต่าง ๆ ทางวิทยาศาสตร์ เช่น การเคลื่อนไหวในสถานะของแข็ง การเคลื่อนไหวของคลื่นทัศนศาสตร์ไม่เชิงเส้น การเคลื่อนไหวส่วนที่เป็นของเหลวในเลือด การเคลื่อนไหวของของเหลว การคำนวณทางชีววิทยา การเคลื่อนที่ของผลึก การเคลื่อนไหวของรอยหักงอเกี่ยวกับการเคลื่อนไหวทางเคมี และทฤษฎีการเปลี่ยนแปลงอื่นๆ

ผลการวิจัย

จากการหาผลเฉลยสมการซิเบอร์-ซาแบท โดยวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ได้ผลเฉลย ดังนี้

สมการซิเบอร์-ซาแบท (the Zhiber-Shabat equation)

พิจารณารูปทั่วไปของสมการซิเบอร์-ซาแบท

$$u_{xt} + pe^u + qe^{-u} + re^{-2u} = 0 \quad (1)$$

โดยการใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์หาผลเฉลย ที่กำหนดตัวแปรคลื่น $\xi = x - ct$ เปลี่ยนสมการที่อยู่ในรูปฟังก์ชัน $u(x, t)$ เป็น $U(\xi)$ โดยที่คำตอบคลื่น $U(\xi)$ นั้นเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว c เปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (1) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$-cu_{\xi\xi} + pe^u + qe^{-u} + re^{-2u} = 0 \quad (2)$$

กำหนดให้

$$v = e^u \quad (3)$$

ซึ่งสมมูลกับ

$$u = \ln v \quad (4)$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} u' &= \frac{1}{v} v' \\ u'' &= \frac{1}{v} v'' - \frac{1}{v^2} (v')^2 \end{aligned} \quad (5)$$

แทนค่าอนุพันธ์ (5) ในสมการ (2) จะได้

$$-c(vv'' - (v')^2) + pv^3 + qv + r = 0 \quad (6)$$

กำหนดให้

$$U(\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^M a_k Y^k \quad (7)$$

โดยที่

$$Y = \operatorname{sech}(\xi) \quad (8)$$

หาอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\frac{dU}{d\xi} = -\mu Y \sqrt{1-Y^2} \frac{dS}{dY} \quad (9)$$

$$\frac{d^2U}{d\xi^2} = \mu^2 \left((Y - 2Y^3) \frac{dS}{dY} + (Y^2 - Y^4) \frac{d^2S}{dY^2} \right) \quad (10)$$

แทนค่า (10) ในสมการ (6) นำพจน์ที่เป็นเชิงเส้นที่มีอนุพันธ์อันดับสูงสุด คือ vv'' และพจน์ที่ไม่เชิงเส้นที่มีอันดับสูงสุด คือ v^3 มาเปรียบเทียบกับเลขชี้กำลังเพื่อหาค่าพารามิเตอร์ M ได้โดยการกระจายอนุกรม $S(Y)$ ในสมการ (7) จะได้

$$\begin{aligned} 3M &= M + 4 + M - 2 \\ M &= 2 \end{aligned} \quad (11)$$

แทนค่า $M = 2$ ในสมการ (7) จะได้

$$v(x, t) = S(Y) = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 \quad (12)$$

$$\text{และ} \quad \frac{dS}{dY} = a_1 + 2a_2 Y \quad (13)$$

$$\frac{d^2 S}{dY^2} = 2a_2 \quad (14)$$

แทนค่า (12), (13) และ (14) ในสมการ (6) โดย

กำหนดให้ $p = q = r = 1$

จะได้สมการวิเคราะห์ในรูปแบบปิดดังนี้

$$\begin{aligned} & (a_0^3 + a_0 + 1) + (-c\mu^2 a_0 a_1 + 3a_0^2 a_1 + a_1)Y + \\ & (-4c\mu^2 a_0 a_2 + 3a_0^2 a_2 + 3a_0 a_1^2 + a_2)Y^2 + \\ & (2c\mu^2 a_0 a_1 - c\mu^2 a_1 a_2 + 6a_0 a_1 a_2 + a_1^3)Y^3 + \\ & (6c\mu^2 a_1 a_2 + c\mu^2 a_1^2 + 3a_0 a_2^2 + 3a_1^2 a_2)Y^4 + \\ & (4c\mu^2 a_1 a_2 + 3a_1 a_2^2)Y^5 + (2c\mu^2 a_2^2 + a_2^3)Y^6 = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

เทียบสัมประสิทธิ์แต่ละเลขชี้กำลังของ Y จะได้

สัมประสิทธิ์ของ

$$Y^6 : 2c\mu^2 a_2^2 + a_2^3 = 0$$

สัมประสิทธิ์ของ

$$Y^5 : 4c\mu^2 a_1 a_2 + 3a_1 a_2^2 = 0$$

สัมประสิทธิ์ของ

$$Y^4 : 6c\mu^2 a_1 a_2 + c\mu^2 a_1^2 + 3a_0 a_2^2 + 3a_1^2 a_2 = 0$$

สัมประสิทธิ์ของ

$$Y^3 : 2c\mu^2 a_0 a_1 - c\mu^2 a_1 a_2 + 6a_0 a_1 a_2 + a_1^3 = 0$$

สัมประสิทธิ์ของ

$$Y^2 : -4c\mu^2 a_0 a_2 + 3a_0^2 a_2 + 3a_0 a_1^2 + a_2 = 0$$

สัมประสิทธิ์ของ

$$Y^1 : -c\mu^2 a_0 a_1 + 3a_0^2 a_1 + a_1 = 0$$

สัมประสิทธิ์ของ

$$Y^0 : a_0^3 + a_0 + 1 = 0$$

แก้ระบบสมการสัมประสิทธิ์กำลังของ Y จะทำให้ได้ค่าของพารามิเตอร์ a_0, a_1, a_2, c และ μ โดยการจัดรูปจะได้

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{1}{6}\alpha + \frac{2}{\alpha} \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= \frac{\gamma^2 - 18\gamma\alpha + 36\alpha^2}{72\alpha^2} \\ \mu &= \frac{1}{12\alpha} \sqrt{-\frac{\gamma^2 - 18\gamma\alpha + 36\alpha^2}{c}} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{เมื่อ } \alpha = (108 + 12\sqrt{93})^{\frac{1}{3}}$$

$$\gamma = \alpha^2 + 18\alpha - 12$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} & \gamma^2 - 18\gamma\alpha + 36\alpha^2 \\ &= \alpha^4 + 18\alpha^3 + 12\alpha^2 - 216\alpha + 144 > 0 \text{ โดยคำนวณ} \\ & \text{ค่าของ } \alpha \end{aligned}$$

จาก $u(x,t) = \ln v(x,t)$ แทนค่า (16) ในสมการ (12) โดยเงื่อนไข

$$Y = \text{sech}(\mu\xi)$$

$$\text{และ } \xi = x - ct$$

จะได้ผลเฉลย ดังนี้

$$u(x,t)$$

$$= \ln \left\{ -\frac{1}{6}\alpha + \frac{2}{\alpha} + \frac{\gamma^2 - 18\gamma\alpha + 36\alpha^2}{72\alpha^2} \text{sech}^2[\mu(x-ct)] \right\}, \quad c < 0$$

โดย μ มีค่าดังสมการ (16)

$$u(x,t)$$

$$= \ln \left\{ -\frac{1}{6}\alpha + \frac{2}{\alpha} - \frac{\gamma^2 - 18\gamma\alpha + 36\alpha^2}{72\alpha^2} \text{sech}^2[\bar{\mu}(x-ct)] \right\}, \quad c > 0$$

เมื่อ

$$\bar{\mu} = \frac{1}{12\alpha} \sqrt{\frac{\gamma^2 - 18\gamma\alpha + 36\alpha^2}{c}}$$

สมการหลุยวีว (The Liouville equation)

กำหนดให้ $q = r = 0, p = 1$ ในสมการซีเบอร์-ชาแบท โดยตัวแปรคลื่น

$$\xi = x - ct \text{ จะได้}$$

$$-cu_{\xi\xi} + e^u = 0 \quad (17)$$

แทนค่าอนุพันธ์ (5) ในสมการ (15) จะได้

$$-c(vv'' - (v')^2) + v^3 = 0 \quad (18)$$

โดยการคูณ vv'' กับ v^3 เพื่อเปรียบเทียบเลขชี้กำลัง หาค่าพารามิเตอร์ M ซึ่งจะได้ $M = 2$

แทนค่า $M = 2$ ในสมการ (7) จะได้

$$v(x,t) = S(Y) = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 \quad (19)$$

$$\text{และ } \frac{dS}{dY} = a_1 + 2a_2 Y \quad (20)$$

$$\frac{d^2 S}{dY^2} = 2a_2 \quad (21)$$

แทนค่า (19), (20) และ (21) ในสมการ (18) โดย
เงื่อนไข (8) จะได้สมการวิเคราะห์ในรูปแบบปิดดังนี้

$$\begin{aligned} & (a_0^3) + (-c\mu^2 a_0 a_1 + 3a_0^2 a_1)Y + \\ & (-4c\mu^2 a_0 a_2 + 3a_0^2 a_2 + 3a_0 a_1^2)Y^2 \\ & + (2c\mu^2 a_0 a_1 - c\mu^2 a_1 a_2 + 6a_0 a_1 a_2 + a_1^3)Y^3 + \\ & (6c\mu^2 a_1 a_2 + c\mu^2 a_1^2 + 3a_0 a_2^2 + 3a_1^2 a_2)Y^4 \\ & + (4c\mu^2 a_1 a_2 + 3a_1 a_2^2)Y^5 + (2c\mu^2 a_2^2 + a_2^3)Y^6 = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

คำนวณค่าตัวแปรแต่ละตัว โดยการเทียบสัมประสิทธิ์
แต่ละเลขชี้กำลังของ Y ในสมการผลลัพธ์ (22) จะได้

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= -2c\mu^2 \end{aligned} \quad (23)$$

จาก $u(x,t) = \ln v(x,t)$ โดยการแทนค่า (23) ในสมการ
(19) โดยเงื่อนไข

$$Y = \operatorname{sech}(\mu\xi) \text{ และ } \xi = x-ct$$

จะได้ผลเฉลย ดังนี้

$$u(x,t) = \ln\{-2c\mu^2 \operatorname{sech}^2[\mu(x-ct)]\}, \quad \mu > 0, c < 0$$

**สมการไฮเพอร์โบลิกไซน์-กอร์ดอน (The
sinh-Gordon equation)**

กำหนดให้ $r=0, q=-1, p=1$ ในสมการช
เบอร์-ชาแบท โดยตัวแปรคลื่น $\xi = x-ct$ จะได้เป็น
สมการไฮเพอร์โบลิกไซน์-กอร์ดอน

$$-cu_{\xi\xi} + e^u - e^{-u} = 0 \quad (24)$$

แทนค่าอนุพันธ์ (5) ในสมการ (23) จะได้

$$-c(vv'' - (v')^2) + v^3 - v = 0 \quad (25)$$

โดยการคูณ vv'' กับ v^3 เพื่อเปรียบเทียบเลขชี้กำลัง หา
ค่าพารามิเตอร์ M ซึ่งจะได้ $M=2$

แทนค่า $M=2$ ในสมการ (7) จะได้

$$v(x,t) = S(Y) = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 \quad (26)$$

$$\text{และ } \frac{dS}{dY} = a_1 + 2a_2 Y \quad (27)$$

$$\frac{d^2 S}{dY^2} = 2a_2 \quad (28)$$

แทนค่า (26), (27) และ (28) ในสมการ (24) โดย
เงื่อนไข (8) จะได้สมการวิเคราะห์ในรูปแบบปิดดังนี้

$$\begin{aligned} & (a_0^3 - a_0) + (-c\mu^2 a_0 a_1 + 3a_0^2 a_1 - a_1)Y + \\ & (-4c\mu^2 a_0 a_2 + 3a_0^2 a_2 + 3a_0 a_1^2 - a_2)Y^2 \\ & + (2c\mu^2 a_0 a_1 - c\mu^2 a_1 a_2 + 6a_0 a_1 a_2 + a_1^3)Y^3 + \\ & (6c\mu^2 a_1 a_2 + c\mu^2 a_1^2 + 3a_0 a_2^2 + 3a_1^2 a_2)Y^4 \\ & + (4c\mu^2 a_1 a_2 + 3a_1 a_2^2)Y^5 + (2c\mu^2 a_2^2 + a_2^3)Y^6 = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

คำนวณค่าตัวแปรแต่ละตัว โดยการเทียบสัมประสิทธิ์
แต่ละเลขชี้กำลังของ Y ในสมการผลลัพธ์ (29) จะได้

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= -1 \\ \mu &= \frac{1}{\sqrt{2c}}, c > 0 \end{aligned} \quad (30)$$

จาก $u(x,t) = \ln v(x,t)$ โดยการแทนค่า (30) ในสมการ
(26) โดยเงื่อนไข

$$Y = \operatorname{sech}(\mu\xi) \text{ และ } \xi = x-ct$$

จะได้ผลเฉลย ดังนี้

$$u(x,t) = \ln\left\{1 - \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{\sqrt{2c}}(x-ct)\right]\right\}, \quad c > 0$$

**สมการคอด-บูลลอจ-มิกฮาโลฟ (The Dodd-
Bullough-Mikhailov equation)**

กำหนดให้ $p=1, q=0, r=1$ ในสมการช
เบอร์-ชาแบท โดยตัวแปรคลื่น $\xi = x-ct$ จะได้เป็น
สมการคอด-บูลลอจ-มิกฮาโลฟ

$$-cu_{\xi\xi} + e^u + e^{-2u} = 0 \quad (31)$$

แทนค่าอนุพันธ์ (5) ในสมการ (31) จะได้

$$-c(vv'' - (v')^2) + v^3 + 1 = 0 \quad (32)$$

โดยการคูณ vv'' กับ v^3 เพื่อเปรียบเทียบเลขชี้กำลัง หา
ค่าพารามิเตอร์ M ซึ่งจะได้ $M=2$

แทนค่า $M=2$ ในสมการ (7) จะได้

$$v(x,t) = S(Y) = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 \quad (33)$$

$$\text{และ} \quad \frac{dS}{dY} = a_1 + 2a_2 Y \quad (34)$$

$$\frac{d^2 S}{dY^2} = 2a_2 \quad (35)$$

แทนค่า (33), (34) และ (35) ในสมการ (32) โดยเงื่อนไข (8) จะได้สมการวิเคราะห์ในรูปแบบปิดดังนี้

$$\begin{aligned} & (a_0^3 + 1) + (-c\mu^2 a_0 a_1 + 3a_0^2 a_1)Y + \\ & (-4c\mu^2 a_0 a_2 + 3a_0^2 a_2 + 3a_0 a_1^2)Y^2 \\ & + (2c\mu^2 a_0 a_1 - c\mu^2 a_1 a_2 + 6a_0 a_1 a_2 + a_1^3)Y^3 + \\ & (6c\mu^2 a_1 a_2 + c\mu^2 a_1^2 + 3a_0 a_2^2 + 3a_1^2 a_2)Y^4 \\ & + (4c\mu^2 a_1 a_2 + 3a_1 a_2^2)Y^5 + (2c\mu^2 a_2^2 + a_2^3)Y^6 = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

คำนวณค่าตัวแปรแต่ละตัว โดยการเทียบสัมประสิทธิ์แต่ละเลขชี้กำลังของ Y ในสมการผลลัพธ์ (36) จะได้

$$\begin{aligned} a_0 &= -1 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= -\frac{3}{2} \\ \mu &= \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{3}{c}}, c < 0 \end{aligned} \quad (37)$$

จาก $u(x,t) = \ln v(x,t)$ โดยการแทนค่า (37) ในสมการ (33) โดยเงื่อนไข

$$Y = \operatorname{sech}(\mu \xi)$$

$$\text{และ} \quad \xi = x - ct$$

จะได้ผลเฉลย ดังนี้

$$u(x,t) = \ln \left[-1 - \frac{3}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{-\frac{3}{c}} (x - ct) \right] \right], c < 0$$

บทวิจารณ์

จากการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น ที่มีรูปแบบของสมการเฉพาะ คือ สมการซิเบอร์-ชาแบท และสมการอื่นที่เกี่ยวข้อง ซึ่งมุ่งเน้นการหาผลเฉลยโดยใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ เพื่อให้ได้ผลเฉลยที่มีรูปแบบทั่วไป และสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับสมการที่มีค่าของสัมประสิทธิ์เฉพาะแยกตามกรณี ทำให้เราได้ผลเฉลยในรูปแบบต่าง ๆ ที่ยังคงประสิทธิภาพ

บทสรุป

1. จากผลเฉลยที่ได้แสดงว่าสามารถใช้วิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ หาผลเฉลยของปัญหาที่อยู่ในรูปแบบของสมการซิเบอร์-ชาแบท และสมการอื่นที่เกี่ยวข้อง ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น ที่ผู้วิจัยศึกษาได้อย่างมีประสิทธิภาพ

2. การหาผลเฉลยโดยวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ จากวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น โดยวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์นั้น นับว่าเป็นวิธีที่ไม่ซับซ้อน และไม่สิ้นเปลืองแรงงานในการคำนวณค่าตัวแปรต่าง ๆ ทั้งยังได้ผลเฉลยที่แน่นอน แตกต่างจากบางวิธีที่สามารถใช้หาผลเฉลยได้ เริ่มต้นการเลือกตัวแปรอิสระใหม่ วิธีนี้เราจะกำหนดเพียงแบบเดียวเท่านั้น อีกทั้งเมื่อหาผลเฉลยได้แล้วเราสามารถแทนค่าของพารามิเตอร์ต่าง ๆ ลงในรูปแบบของคำตอบได้อย่างชัดเจน ซึ่งวิธีอื่นบางวิธีนั้นอาจจะต้องเลือกตัวแปรอิสระใหม่หลายกรณี และเมื่อได้คำตอบแล้วจะต้องกำหนดค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ใหม่อีกครั้งด้วย ดังนั้นวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ นับว่าเป็นวิธีที่สามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้นได้อย่างมีประสิทธิภาพ และไม่เปลืองแรงงานในการคำนวณ

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยทำการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้นที่มีรูปแบบเฉพาะ คือ สมการซิเบอร์-ชาแบท (The Zhiber-Shabat equation) และสมการอื่นที่เกี่ยวข้อง เช่น สมการหลุยวี (The Liouville equation) สมการไฮเพอร์โบลิกไซน์-กอร์ดอน (The sinh-Gordon equation) และสมการดอด-บูลลอจ-มิกฮาโลฟ (The Dodd-Bullough-Mikhailov equation) โดยวิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์ แต่โดยทั่วไปยังมีปัญหาที่มีรูปแบบเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้นในลักษณะอื่น ๆ ที่ยังไม่ถูกพิจารณาเพื่อหาผลเฉลยที่มีรูปแบบทั่วไป ซึ่งเป็นพื้นฐานในการนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาที่มีรูปแบบเฉพาะอื่น ๆ ต่อไป

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยความรู้จาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วรรณทนา พรหมสอน อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สหทัย รัตนมงคลกุล และดร.จุฑารัตน์ คงสอน ที่กรุณาให้คำปรึกษาแนะนำแนวทางที่ถูกต้องในการศึกษาค้นคว้า ที่ถูกต้องในการศึกษาค้นคว้า ตลอดจนแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ ของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ด้วยความละเอียดถี่ถ้วนและเอาใจใส่ด้วยดีเสมอมา ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งเป็นอย่างยิ่ง จึงขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ขอขอบคุณบิดามารดาที่ได้ส่งเสริมและสนับสนุนผู้วิจัยให้มีโอกาสทางการศึกษาที่สูงขึ้น

ขอขอบคุณเพื่อน ๆ รุ่นพี่ และรุ่นน้องทุกคน ที่ให้ความช่วยเหลือที่ดี

คุณค่าและประโยชน์ของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้วิจัยขอมอบเป็นกตัญญูคุณเวทิตาแต่ บุพการี บวรพาจารย์ และผู้มีพระคุณทุกท่านทั้งในอดีตและปัจจุบัน ที่ทำให้ข้าพเจ้าเป็นผู้มีการศึกษา และประสบความสำเร็จมาจนตรงเท่าทุกวันนี้

เอกสารอ้างอิง

สินทรัพย์ แซ่แต้. 2552. วิธีไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์

สำหรับสมการเควีวีปรับปรุงและสมการเควีวีประกอบ. วิทยานิพนธ์ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา.

Hirota, R. 1980. Direct method of finding exact solutions of nonlinear evolution equations. In Bullough & Caudrey (Eds.), Backlund Transformations. Berlin: Springer.

Wazwaz, A. M. 2004. The sine-cosine method for obtaining solutions with compact and noncompact structures. Applied Mathematics and Computation. 159: 559-576.

_____. 2006. The tanh method for travelling wave solutions to the Zhiber-shabat equation and other related equation. Applied Mathematics and Computation Science. 13: 584-592.

_____. 2007. New kinks and solitons solutions to the $(2 + 1)$ -dimensional Konopelchenko-Dubrovsky equation. Applied Mathematics and Computation. 45: 473-479.

_____. 2007. The tanh-coth and the sech methods for exact solutions of the Jaulent-Miodek equation. Phys. Let. A366: 85-90.

He, J. H., & Wu, X. H. 2006. Exp-function method for nonlinear wave equations. Chaos Solitons. Fract. 30: 700-708.

Ganji, D. D., & Rafei, M. 2006. Solitary wave solutions for a generalized Hirota-Satsuma coupled KdV equation by homotopy perturbation method. Physics Letters. A 356: 131-137.

_____, & Abdollahzadeh M. 2008. Exact travelling solutions for the Lax's seventh-order KdV equation by sech method and rational exp-function method. Appl. Math. Comput. 206: 438-444.

Malfliet, W. 1992. Solitary wave solutions of nonlinear wave equations. Am. J. Phys. 60: 650-654.