

ข้อบกพร่องและมโนคติที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่อง การบวกและการลบเศษส่วน

Students' Mathematical Errors and Misconceptions on Addition and Subtraction of Fraction

น้ำฝน ออบเชย (Namfon Obchery)* ดร.หล้า ภาวภูตานนท์ (Dr.Lha Pavaputanon)**

บทคัดย่อ

การศึกษานี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ ศึกษาข้อบกพร่องและมโนคติที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์เรื่อง การบวกและการลบเศษส่วน กลุ่มเป้าหมายเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนเทศบาลบ้านโนนทัน จำนวน 46 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยได้แก่ แบบทดสอบวัดข้อบกพร่องทางคณิตศาสตร์ และแบบสัมภาษณ์วัดมโนคติที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ ผลการศึกษาพบว่า 1. นักเรียนมีข้อบกพร่องทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การบวกและการลบเศษส่วน 5 ด้าน ได้แก่ 1) ด้านการบิดเบือนทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยามและสมบัติ 2) ด้านการขาดการตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา 3) ด้านการตีความด้านภาษา 4) ด้านการใช้ข้อมูลผิด และ 5) ด้านข้อผิดพลาดในเทคนิคการทำ และ 2. จากการวิเคราะห์หามโนคติที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ นักเรียนมีมโนคติที่คลาดเคลื่อนในการบวกและการลบเศษส่วน 3 ด้าน ได้แก่ 1) มโนคติคลาดเคลื่อน 2) มโนคติเชิงคณิตศาสตร์แบบไม่สมบูรณ์ และ 3) ไม่เข้าใจมโนคติเชิงคณิตศาสตร์

ABSTRACT

The purpose of this research were to analyze students' mathematical Errors and Misconceptions on Addition and Subtraction of Fraction. The participants of this study consisted of 44 Prathomsuksa 6 students who studied in the 2st semester of 2014 academic year of Nonthun Municipal school, Khon Kaen Province. The instruments of this study were a diagnostic test about mathematical errors and a structured interviews. The finding 1. Students' mathematical Errors on the Addition and subtraction of Fraction 5 types of errors were found; (1) Misused Data (2) Misinterpreted Language (3) Distorted Theorem or Definition (4) Unverified Solution (5) Technical Error. 2. Students' mathematical Misconception were on the Addition and subtraction of Fraction 3 type of misconceptions were found; (1) partial understanding, (2) specific misconception, (3) no understanding.

คำสำคัญ: ข้อบกพร่องทางคณิตศาสตร์ มโนคติที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ การบวกและการลบเศษส่วน

Keywords: Mathematical Errors, mathematical Misconception, Addition and Subtraction of Fraction

* นักศึกษา หลักสูตรศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

** อาจารย์ ดร. สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

บทนำ

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญอย่างยิ่งต่อการพัฒนาความคิดมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ช่วยให้เกิดการวางแผน ตัดสินใจแก้ปัญหา และนำไปใช้ในชีวิตรประจำวัน ได้อย่างถูกต้อง เหมาะสม นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์เทคโนโลยี และศาสตร์อื่น ๆ คณิตศาสตร์จึงมีประโยชน์ต่อการดำเนินชีวิต ช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น และสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข (สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ, 2551)

จากผลการประเมินนักเรียนนานาชาติ (Program for International Student Assessment หรือ PISA) ในปี 2012 ของโครงการ PISA ประเทศไทย สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ (2556) พบว่าการรู้คณิตศาสตร์ในหมวดกระบวนการทางคณิตศาสตร์ค่าเฉลี่ยนักเรียนไทย มีจุดอ่อนที่สุดในเรื่องกระบวนการ การคิด หรือการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ซึ่งจากผลการประเมินดังกล่าวแสดงให้เห็นว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนยังอยู่ในเกณฑ์ต่ำ ควรได้รับการปรับปรุงรวมทั้งปัญหาการที่นักเรียนไม่ประสบความสำเร็จในการเรียนคณิตศาสตร์ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำ รวมไปถึงการที่ไม่ชอบเรียนคณิตศาสตร์เป็นปัญหาที่จำเป็นต้องได้รับการแก้ไขจากทุกฝ่ายที่มีส่วนเกี่ยวข้อง (โครงการ PISA 2012 ประเทศไทย สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ, 2556)

การบวกและการลบเศษส่วนเป็นอีกปัญหาหนึ่งสำหรับนักเรียน แม้ว่าส่วนใหญ่แล้วนักเรียนไม่มีปัญหาในการเข้าใจความหมายของ แต่นักเรียนเรียนก็ยังสับสนในการหาผลลัพธ์ที่ถูกต้อง เมื่อนักเรียนต้องเผชิญการแก้ปัญหาการบวกเศษส่วน นักเรียนมักจะ

เลือก “วิธีที่ง่ายที่สุดในการหาคำตอบ” โดยไม่คำนึงถึงการทำตัวส่วนให้เท่ากัน แต่มักจะบวกตัวเศษและตัวส่วนเข้าด้วยกัน หรือทำตามกฎ Sadi (2007 อ้างถึงในทัศนีย์, 2553) นอกจากนี้ Hart (1980 อ้างถึงในทัศนีย์, 2553) ทำการศึกษาพบว่า 30% ของนักเรียนอายุ 13 ปี จะทำข้อผิดพลาดในลักษณะนี้ และสังเกตพบว่าเด็กอายุ 15 ปี บางคนก็ทำผิดพลาดเช่นกัน ซึ่ง Sadi (2007 อ้างถึงในทัศนีย์, 2553) ได้กล่าวไว้ว่า ความเข้าใจโมเดลที่คลาดเคลื่อนนี้ ส่วนหนึ่งอาจเป็นผลจากกฎของการคูณเศษส่วน

การเรียนรู้เรื่องเศษส่วนผู้เรียนจะเรียนรู้โดยผ่านการใช้สื่อของครู ได้แก่ สื่อกระดาษรูปสี่เหลี่ยมแบ่งออกเป็นหลายๆ ส่วนที่เท่ากัน แผนภาพแสดงการแบ่งหนึ่งหน่วยออกเป็นหลายๆ ส่วนย่อย การบวกและการลบเศษส่วนเป็นปัญหาที่ดูเหมือนเป็นเรื่องที่ใกล้ตัวเป็นอย่างมากสำหรับผู้เรียน การใช้โมเดลเรื่องเศษส่วนในการแก้ปัญหาการบวกและการลบจึงเป็นเรื่องที่ยากตามไปด้วย (อัมพร, 2547) เช่นเดียวกับที่ Kerslake, (1986 อ้างถึงใน ทัศนีย์, 2553) กล่าวว่านักเรียนใช้การท่องจำเทคนิคต่าง ๆ ที่เคยเรียนในการดำเนินการเกี่ยวกับเศษส่วน โดยที่ความรู้เรื่องเศษส่วนที่เด็กมีอยู่นั้น ไม่ใช่ความรู้ที่สร้างขึ้นจากสิ่งแวดล้อมที่มีอยู่จริงของเด็ก และการดำเนินการเรื่องเศษส่วนมีความเป็นนามธรรมในการนิยาม ซึ่งความเป็นนามธรรมและการขาดความรู้สึกเกี่ยวกับเศษส่วนนี้นำนักเรียนไปสู่ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับเศษส่วนหลายประการ โดยส่วนใหญ่แล้วจะเกี่ยวกับการดำเนินการทางพีชคณิต (การบวก การลบ การคูณและการหาร) ซึ่งสอดคล้องกับเกษสุดา (2538) ได้ศึกษาความเข้าใจเรื่องเศษส่วนของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 พบว่านักเรียนมีความเข้าใจเรื่องความหมายของเศษส่วน การบวกการลบเศษส่วนที่มีส่วนไม่เท่ากัน การคูณและการหารเศษส่วน อยู่ในระดับน้อยและยังพบว่าด้านความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับโมเดลเรื่องเศษส่วนกลุ่มตัวอย่างยังมีความเข้าใจอยู่ในระดับน้อยมาก และ พัทธา (2538) ได้ศึกษาปัญหาเรื่องเศษส่วนของนักเรียนชั้นประถมศึกษา

ปีที่ 5 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำ พบว่าเกิดจาก ปัญหาด้านข้อบกพร่องในเรื่อง การบวกและการลบ เศษส่วน ข้อบกพร่องส่วนใหญ่ คือ การบวกและการลบ เศษส่วนที่มีส่วนไม่เท่ากัน

ด้วยเหตุผลที่กล่าวข้างต้นนี้ ผู้วิจัยจึงมีความ สนใจที่จะศึกษาเกี่ยวกับข้อบกพร่องและความเข้าใจเชิง มโนคติที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การบวก และการลบเศษส่วนของนักเรียน ซึ่งจะเป็ นหลักฐานเชิง ประจักษ์และข้อค้นพบต่าง ๆ เพื่อนำมาใช้เป็นแนว ทางการปรับปรุงการจัดการเรียนรู้เพื่อให้นักเรียนมี ความเข้าใจเชิงมโนคติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การบวก และการลบเศษส่วน มากยิ่งขึ้น

วัตถุประสงค์

เพื่อศึกษาข้อบกพร่องและมโนคติที่ คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การบวกและการลบ เศษส่วนของนักเรียน

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. ข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ หมายถึง ข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้นในขณะที่แก้ปัญหาทาง คณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นอุปสรรคต่อการเรียนรู้ทาง คณิตศาสตร์ทำให้ผู้เรียนไม่สามารถบรรลุวัตถุประสงค์ หรือจุดมุ่งหมายทางการเรียนได้ ซึ่งวัดได้จาก แบบทดสอบอัตนัยเรื่อง การบวกและการลบเศษส่วน ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ตามกรอบแนวคิด ของโมวัไฮวิทซ์ และคณะ (Moshovitz et al., 1987) ซึ่ง ประกอบด้วย 5 ด้าน ดังนี้

1) ด้านการใช้ข้อมูลผิด (Misused Data) คือ นักเรียนเกิดการละเลยการใช้ข้อมูลที่จำเป็น ในขั้นตอนการแก้ปัญหา ทำผิดพลาดโดยหาคำตอบใน สิ่งที่ไม่ต้องการ คัดลอกโจทย์ผิด

2) ด้านการตีความด้านภาษา (Misinterpreted Language) คือ นักเรียนไม่สามารถ

ตีความจากประโยคภาษามาเป็นประโยคทาง คณิตศาสตร์ได้หรือตีความอย่างไม่ถูกต้อง

3) ด้านการบิดเบือนทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม และสมบัติ (Distorted Theorem or Definition) คือ นักเรียนขาดความรู้ความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับ ทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยามและสมบัติต่าง ๆ หรือจำ ทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยามและสมบัติผิด

4) ด้านการขาดการตรวจสอบใน ระหว่างการแก้ปัญหา (Unverified Solution) คือ นักเรียนดำเนินตามขั้นตอนการแก้ปัญหาได้อย่าง ถูกต้อง แต่คำตอบผิดไปจากที่โจทย์กำหนดให้ หรือ ตอบคำถามในสิ่งที่โจทย์ไม่ต้องการ

5) ด้านข้อผิดพลาดในเทคนิคการทำ (Technical Error) คือ เป็นข้อผิดพลาดที่เกิดจากนักเรียน ขาดความระมัดระวังในการคิดคำนวณ

2. มโนคติที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์

หมายถึง ความรู้ความเข้าใจของแต่ละบุคคลที่เกิดจาก ประสบการณ์เดิมเพื่อนำมาสร้างเป็นความหมายใหม่ หรือความรู้ใหม่ โดยที่ความรู้เดิมนั้นไม่สอดคล้องกับ ทฤษฎีหรือแนวคิดที่เป็นที่ยอมรับในสังคมคณิตศาสตร์ ในงานวิจัยนี้ได้ใช้เกณฑ์การสอดคล้องกับมโนคติทาง วิทยาศาสตร์ ซึ่งแบ่งออกเป็น 5 ประเภทตามแนวคิด ของ Haidar (1997 อ้างถึงใน ธัญญารัตน์, 2555) ซึ่ง นำมาประยุกต์ใช้กับมโนคติคณิตศาสตร์ เพื่อวิเคราะห์ มโนคติของนักเรียนประกอบด้วย 4 ด้าน ดังนี้

1) มโนคติเชิงคณิตศาสตร์ (sound understanding) หรือ SU คือ คำตอบของนักเรียนที่ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีมโนคติสอดคล้องกับมโนคติ ที่เป็นที่ยอมรับและสอดคล้องกับมโนคติของนัก คณิตศาสตร์ทุกองค์ประกอบ

2) มโนคติเชิงคณิตศาสตร์แบบไม่ สมบูรณ์ (partial understanding) หรือ PU คือ คำตอบ ของนักเรียนที่แสดงว่ามีมโนคติที่สอดคล้องกับมโนคติ ที่เป็นที่ยอมรับและสอดคล้องกับมโนคติของนัก คณิตศาสตร์อย่างน้อย 1 องค์ประกอบ

3) มโนคติคลาดเคลื่อน (specific misconception) หรือ MU คือ คำตอบของนักเรียนที่แสดงมโนคติที่ไม่สอดคล้องหรือคลาดเคลื่อนจากมโนคติที่เป็นที่ยอมรับ และสอดคล้องกับมโนคติของนักคณิตศาสตร์

4) ไม่เข้าใจมโนคติเชิงคณิตศาสตร์ (no understanding) หรือ NU คือ การที่นักเรียนไม่ตอบคำถาม ตอบคำถามในลักษณะทวนคำถามหรือตอบคำถามไม่ตรงประเด็น

3. นักเรียน หมายถึง นักเรียน ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2557 โรงเรียนเทศบาลบ้านโนนทัน จังหวัดขอนแก่น

วิธีการวิจัย

การวิจัยนี้เป็นการศึกษาเชิงสำรวจ โดยเน้นการบรรยายเชิงวิเคราะห์ ซึ่งมีรายละเอียดเกี่ยวกับวิธีการวิจัยดังนี้

กลุ่มเป้าหมาย

นักเรียนระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนเทศบาลบ้านโนนทัน อำเภอเมือง จังหวัดขอนแก่นที่กำลังศึกษาในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2557 จำนวน 46 คน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล ได้แก่

1. แบบทดสอบวัดข้อบกพร่องทางคณิตศาสตร์ เรื่องการบวกและการลบเศษส่วน แบบอัตนัยจำนวน 6 ข้อ ใช้สำหรับตรวจสอบข้อบกพร่องทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่อง การบวกและการลบเศษส่วน โดยผู้วิจัยได้สร้างแบบทดสอบภายใต้คำแนะนำและตรวจสอบจากผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์

2. แบบสัมภาษณ์วัดมโนคติทางคณิตศาสตร์ ใช้สำหรับตรวจสอบมโนคติที่คลาดเคลื่อนทาง

คณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่อง การบวกและการลบเศษส่วน

การเก็บรวบรวมข้อมูล

1. ผู้วิจัยสร้างแบบทดสอบวัดข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์

2. นำแบบทดสอบมาตรวจตามเกณฑ์คะแนนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น พร้อมหาค่าร้อยละ วิเคราะห์ข้อบกพร่องเรื่องการบวกและการลบเศษส่วนที่พบโดยแยกตามลักษณะของข้อบกพร่อง และวิเคราะห์ลักษณะของมโนคติที่คลาดเคลื่อนตามลักษณะข้อบกพร่องที่พบ จากนั้นผู้วิจัยได้สัมภาษณ์นักเรียนเพิ่มเติม เพื่อเป็นข้อมูลประกอบการวิเคราะห์ลักษณะมโนคติที่คลาดเคลื่อน

การวิเคราะห์ข้อมูล

ผลการวิจัย

จากที่ผู้วิจัยได้สร้างแบบทดสอบเพื่อวัดข้อบกพร่องและมโนคติที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่องการบวกและการลบเศษส่วน โดยพบข้อบกพร่องทั้งหมด 5 ด้าน ตามกรอบทฤษฎี Movshovitz et al. (1987) และมโนคติที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ 3 ด้านตามกรอบทฤษฎีของ Haidar (1997 อ้างถึงในธัญญารัตน์, 2555) แสดงดังรายละเอียดต่อไปนี้

ตารางที่ 1 ผลการประเมินคะแนนของนักเรียน เรื่อง
การบวกเศษส่วน

คะแนน	1. การบวก		2. โจทย์		3. โจทย์	
	จำนวน	เปอร์เซ็นต์ (%)	จำนวน	เปอร์เซ็นต์ (%)	จำนวน	เปอร์เซ็นต์ (%)
0	0	0	1	2.17	0	0
1	18	39.1	14	30.4	16	34.8
2	2	4.35	13	28.3	16	34.8
3	6	2.17	6	13	8	17.4
4	1	13	10	21.7	5	10.9
5	19	41.3	2	4.35	1	2.17
รวม	46	100	46	100	46	100

จากตารางที่ 1 พบว่ามีนักเรียนที่เกิดข้อผิดพลาดในแต่ละข้อดังต่อไปนี้ หัวข้อการบวกโจทย์ปัญหาเศษส่วนจำนวนคณะพบนักเรียนมีข้อผิดพลาดมากที่สุด 45 คน คิดเป็น 97.8% รองลงมาหัวข้อการบวกโจทย์ปัญหาเศษส่วนพบว่านักเรียนมีข้อผิดพลาดทั้งหมด 44 คน คิดเป็น 95.8% และสุดท้ายในหัวข้อการบวกเศษส่วนปกติพบว่านักเรียนมีข้อผิดพลาดทั้งหมด 27 คน คิดเป็น 58.7%

ตารางที่ 2 ผลการประเมินคะแนนของนักเรียน เรื่อง
การลบเศษส่วน

คะแนน	1. การลบ		2. โจทย์		3. โจทย์	
	จำนวน	เปอร์เซ็นต์ (%)	จำนวน	เปอร์เซ็นต์ (%)	จำนวน	เปอร์เซ็นต์ (%)
0	0	0	0	0	0	0
1	17	37	13	28.3	13	28.3
2	6	13	15	32.6	16	34.8
3	4	18.7	2	4.35	7	15.2
4	18	39.1	11	23.9	7	15.2
5	1	2.17	5	10.9	1	2.17
รวม	46	100	46	100	46	100

จากตารางที่ 2 พบว่านักเรียนเกิดข้อผิดพลาดในแต่ละข้อดังต่อไปนี้ หัวข้อโจทย์ปัญหาการลบเศษส่วนจำนวนคณะและการบวกเศษส่วนปกติพบนักเรียนมีข้อผิดพลาดมากที่สุดจำนวน 45 คน คิดเป็น 97.8% และหัวข้อโจทย์ปัญหาการลบเศษส่วนจำนวน 41 คน คิดเป็น 89.13%

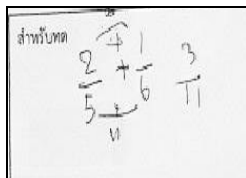
ผลการวิเคราะห์ข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องการบวกและการลบเศษส่วนของนักเรียน

จากการวิเคราะห์ข้อผิดพลาดในแต่ละข้อพบลักษณะข้อบกพร่องทางคณิตศาสตร์เรื่องการบวกเศษส่วน 5 ด้านตามกรอบทฤษฎีของ Movshovitz et al.

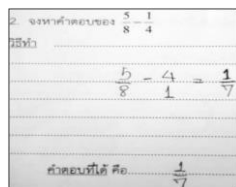
(1987) ลักษณะข้อบกพร่องที่พบบ่อยที่สุดได้แก่ 1) ด้านการบิดเบือนทฤษฎีบท ทฎ สูตร บทนิยามและสมบัติ 2) ด้านการขาดการตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา 3) ด้านการตีความด้านภาษา 4) ด้านการใช้ข้อมูลผิด และสุดท้าย 5) ด้านข้อผิดพลาดในเทคนิคการทำ ดังแสดงในรายละเอียดต่อไปนี้

1. ข้อบกพร่องด้านการบิดเบือนทฤษฎีบท ทฎ สูตร บทนิยามและสมบัติ ในการดำเนินการบวกและการลบเศษส่วนของนักเรียนพบว่านักเรียนไม่สามารถหาคำตอบการบวกและการลบเศษส่วนได้อย่างถูกต้อง ลักษณะที่พบบ่อยที่สุดคือนักเรียนจะดำเนินการบวกและลบเศษส่วนโดยเอาเศษบวกเศษและเอาส่วนบวกส่วน ในกรณีการดำเนินการลบเศษส่วนก็เช่นกัน ซึ่งเป็นการดำเนินการที่ผิดเพราะการบวกหรือลบเศษส่วนในกรณีที่ส่วนไม่เท่ากันจะต้องทำส่วนให้เท่ากันก่อนที่จะทำการบวกหรือลบเศษส่วน ดังแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 ลักษณะข้อบกพร่องด้านการบิดเบือนทฤษฎีบท ทฎ สูตร บทนิยามและสมบัติ เรื่อง การบวกเศษส่วน



ภาพที่ 1 แสดงการบวกเศษส่วนของนักเรียน



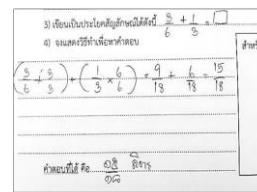
ภาพที่ 2 แสดงการลบเศษส่วนของนักเรียน

จากภาพที่ 1 พบว่านักเรียนดำเนินการบวกเศษส่วนโดยการเอาเศษบวกเศษและเอาส่วนบวกส่วน และในภาพที่ 2 พบว่าก่อนที่นักเรียนจะดำเนินการลบเศษส่วนนักเรียนได้กลับเศษส่วนตัวลบก่อน แสดงให้

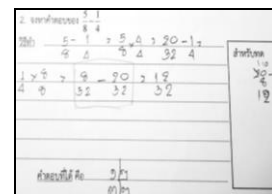
เห็นถึงความไม่เข้าใจเกี่ยวกับการบวกและการลบเศษส่วนของนักเรียน ซึ่งเป็นข้อบกพร่องด้านการบิดเบือนทฤษฎีบท ทฎ สูตร บทนิยามและสมบัติ

2. ข้อบกพร่องด้านการขาดการตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา จากการตรวจสอบพบ 2 กรณีคือนักเรียนดำเนินการถูกต้องแต่คำตอบที่ได้ผิดหรือยังไม่อยู่ในรูปผลสำเร็จ และในกรณีที่นักเรียนดำเนินการผิดแต่คำตอบที่นักเรียนได้มีความถูกต้อง กรณีที่ 1 นักเรียนไม่มีการตรวจสอบคำตอบที่ได้และส่วนใหญ่คำตอบที่นักเรียนได้ไม่อยู่ในรูปผลสำเร็จ ซึ่งส่วนใหญ่พบว่าคำตอบของนักเรียนไม่อยู่ในรูปเศษส่วนอย่างต่ำ และกรณีที่ 2 ในขั้นการดำเนินการพบว่านักเรียนส่วนใหญ่ไม่ได้ตรวจสอบในระหว่างการเขียนเนื่องจากในการดำเนินการลบไม่มีสมบัติการสลับที่ ซึ่งเป็นการดำเนินการที่ผิดพลาดแต่คำตอบที่นักเรียนได้กลับมีความถูกต้อง ซึ่งสาเหตุส่วนใหญ่แล้วเกิดจากนักเรียนไม่ได้ตรวจสอบในขณะที่นักเรียนกำลังดำเนินการบวกหรือลบเศษส่วน ดังแสดงในตัวอย่างที่ 2

ตัวอย่างที่ 2 ลักษณะข้อบกพร่องด้านการขาดการตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา



ภาพที่ 3 แสดงการบวกโจทย์ปัญหาเศษส่วน



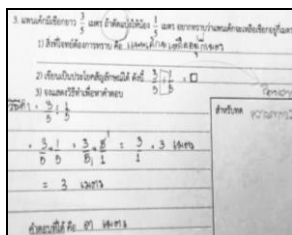
ภาพที่ 4 แสดงการลบเศษส่วนของนักเรียน

จากภาพที่ 3 พบว่านักเรียนแสดงวิธีการบวกเศษส่วนได้อย่างถูกต้องแต่นักเรียนไม่ตอบให้อยู่ในรูป

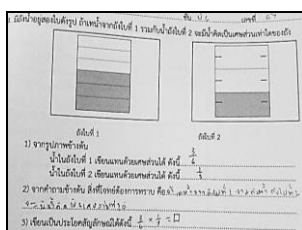
เศษส่วนอย่างต่ำ และในภาพที่ 4 พบว่านักเรียน
 ดำเนินการการลบเศษส่วนผิดพลาดเนื่องจากนักเรียน
 สลับตำแหน่งระหว่างเศษส่วนตัวตั้งกับเศษส่วนตัวลบ
 แต่คำตอบที่นักเรียนได้กลับถูกต้อง ซึ่งแสดงให้เห็นถึง
 ข้อบกพร่องของนักเรียนที่เกิดจากการขาดการ
 ตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา

3. ข้อบกพร่องด้านการตีความด้านภาษา จาก
 การตรวจสอบพบว่านักเรียนไม่สามารถตีความจาก
 ประโยคภาษาให้อยู่ในรูปประโยคทางคณิตศาสตร์ได้
 ทำให้เป็นอุปสรรคต่อการหาคำตอบของนักเรียนและยัง
 ส่งผลให้นักเรียนไม่สามารถแก้โจทย์ปัญหาการบวก
 และการลบเศษส่วนได้อย่างถูกต้อง ซึ่งส่วนใหญ่แล้ว
 นักเรียนจะเกิดความผิดพลาดในการตีความในการ
 ดำเนินการ ตัวอย่างเช่น นักเรียนตีความจากคำว่า “ตัด
 แบ่ง” เป็นการหารและนอกจากนี้ยังพบว่านักเรียน
 ตีความจากคำว่า “นำมารวมกัน” เป็นการคูณ จากการ
 ตีความที่ผิดพลาดดังกล่าวส่งผลให้คำตอบสุดท้ายของ
 นักเรียนผิดไปด้วย ซึ่งสาเหตุเกิดจากนักเรียนเรียนรู้
 เศษส่วนแบบท่องจำแต่ไม่ได้มีความเข้าใจถึงหลักการที่
 ถูกต้อง ดังแสดงในตัวอย่างที่ 3

ตัวอย่างที่ 3 ลักษณะข้อบกพร่องด้านการตีความด้าน
 ภาษา



ภาพที่ 5 แสดงการลบ โจทย์ปัญหาเศษส่วนของนักเรียน

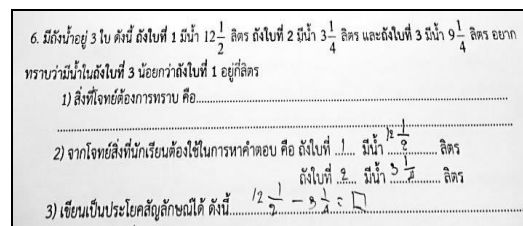


ภาพที่ 6 แสดงการบวก โจทย์ปัญหาเศษส่วนของ
 นักเรียน

ภาพที่ 4 และ 5 แสดงการตีความที่ผิดพลาด
 ของนักเรียนซึ่งแสดงให้เห็นถึงความบกพร่องในด้
 การตีความด้านภาษา

4. ด้านการใช้ข้อมูลผิด เป็นข้อบกพร่องที่เกิด
 จากนักเรียน ละเลยการใช้ข้อมูลที่จำเป็นในการ
 แก้ปัญหา ในกรณีนี้พบว่านักเรียนหาคำตอบโดยการนำ
 ข้อมูลที่โจทย์ให้มา แต่โจทย์ไม่ได้ถามมาใช้ในการหา
 คำตอบ ซึ่งสาเหตุเกิดจากการที่นักเรียนไม่ตรวจสอบ
 คำสั่งว่าโจทย์ต้องการอะไรซึ่งส่งผลให้นักเรียนตอบ
 คำถามไม่ตรงประเด็นที่โจทย์ต้องการ ดังแสดงใน
 ตัวอย่างที่ 4

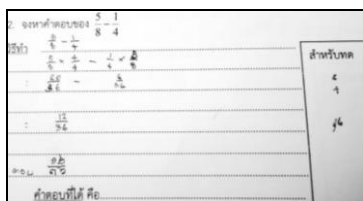
ตัวอย่างที่ 4 ลักษณะข้อบกพร่องด้านการใช้ข้อมูลผิด



ภาพที่ 7 แสดงการลบ โจทย์ปัญหาจำนวนคละของ
 นักเรียน

5. ด้านข้อผิดพลาดในเทคนิคการทำ เป็น
 ข้อบกพร่องที่เกิดจากนักเรียนคำนวณตัวเลขที่ผิดพลาด
 ซึ่งสาเหตุเกิดจากนักเรียนคิดเลขเร็วและไม่ได้
 ตรวจสอบในการคิดคำนวณของตัวเองทำให้ผลลัพธ์ที่
 นักเรียนได้ออกมามีความผิดพลาด ดังแสดงในตัวอย่าง
 ที่ 5

ตัวอย่างที่ 5 ลักษณะข้อบกพร่องด้านข้อผิดพลาดใน
 เทคนิคการทำ



ภาพที่ 8 แสดงการลบเศษส่วนของนักเรียน

จากภาพที่ 6 แสดงข้อผิดพลาดของนักเรียนในการคิดคำนวณตัวเลข จากตัวอย่างแทนที่นักเรียนจะได้คำตอบเท่ากับ $\frac{12}{24}$ แต่นักเรียนกลับคูณตัวเลขคิด $8 \times 4 = 36$ ทำให้นักเรียนได้คำตอบที่ผิดตามไปด้วย ซึ่งแสดงให้เห็นถึงข้อบกพร่องในด้านข้อผิดพลาดในเทคนิคการทำ

ผลการวิเคราะห์ห้มนิเทศที่คลาดเคลื่อนทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่อง การบวกและการลบเศษส่วน

จากการวิเคราะห์ห้มนิเทศที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนเรื่องการบวกและการลบเศษส่วนจากแบบวัดข้อบกพร่องและการสัมภาษณ์พบข้อบกพร่องที่คลาดเคลื่อน 3 ด้านตามกรอบทฤษฎีของ Haidar (1997 อ้างถึงในธัญญารัตน์, 2555) ได้แก่ 1) มโนคติคลาดเคลื่อน 2) มโนคติเชิงคณิตศาสตร์แบบไม่สมบูรณ์ และ 3) ไม่เข้าใจมโนคติเชิงคณิตศาสตร์ แสดงดังรายละเอียดต่อไปนี้

1. มโนคติคลาดเคลื่อน จากการวิเคราะห์พบว่านักเรียนมีมโนคติที่คลาดเคลื่อนในเรื่องการบวกและการลบเศษส่วน ได้แก่ นักเรียนดำเนินการบวกและการลบเศษส่วนโดยการนำเศษบวกลบเศษและนำส่วนบวกลบส่วน และนอกจากนี้ยังพบว่านักเรียนมีมโนคติที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับการเขียนประโยคภาษาให้อยู่ในรูปแบบประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ไม่ถูกต้อง ซึ่งจะส่งผลให้นักเรียนไม่สามารถแก้ปัญหาเรื่องการบวกและการลบเศษส่วนได้

2. มโนคติเชิงคณิตศาสตร์แบบไม่สมบูรณ์ นักเรียนมีความเข้าใจที่ถูกต้องแต่ยังไม่สมบูรณ์ในการหาคำตอบการบวกและการลบเศษส่วน หรือมีวิธีการแก้โจทย์ปัญหาที่แสดงว่ามีมโนคติที่สอดคล้องกับมโนคติ

ที่เป็นที่ยอมรับและสอดคล้องกับมโนคติของนักคณิตศาสตร์ อย่างน้อย 1 องค์ประกอบ จากการวิเคราะห์พบว่านักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับการบวกและการลบเศษส่วนว่าต้องทำให้เท่ากันก่อนแต่นักเรียนไม่ตัดทอนคำตอบให้อยู่ในรูปเศษส่วนอย่างต่ำ และนักเรียนมีความเข้าใจว่าการทำให้เท่ากันไม่จำเป็นต้องนำตัวเลขที่มากคูณส่วนทั้งสองไปคูณเศษเพียงทำให้เท่ากันก็สามารถที่จะนำเศษส่วนทั้งสองมาบวกหรือลบกันได้เลย ซึ่งเป็นมโนคติเชิงคณิตศาสตร์แบบไม่สมบูรณ์ของนักเรียน

3. ไม่เข้าใจมโนคติเชิงคณิตศาสตร์ จากการวิเคราะห์ข้อมูลพบว่า นักเรียนที่ไม่เข้าใจมโนคติเชิงคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่จะตอบคำถามในลักษณะลอกโจทย์ หรือเขียนคำตอบจากตัวเลขที่ปรากฏใน โจทย์ และนอกจากนี้ยังพบว่านักเรียนไม่เขียนคำตอบใด ๆ ในกระดาษคำตอบเลย แสดงให้เห็นว่านักเรียนไม่เข้าใจมโนคติเชิงคณิตศาสตร์

อภิปรายผลการวิจัย

จากการทำการวิจัยผู้วิจัยสามารถอภิปรายผลการวิจัยได้ดังนี้

ด้านข้อบกพร่อง พบว่านักเรียนมีความบกพร่อง 5 ด้าน ได้แก่ ลักษณะข้อบกพร่องที่พบมากที่สุด ได้แก่

1) ด้านการบิดเบือนทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยามและสมบัติ ลักษณะที่พบมากที่สุดคือนักเรียนไม่เข้าใจหลักการบวกเศษส่วนที่ถูกต้อง ส่วนใหญ่แล้วนักเรียนจะบวกลบเศษส่วนโดยการไม่คำนึงว่าตัวส่วนของเศษส่วนทั้งสองเท่ากันหรือไม่แต่นักเรียนจะใช้วิธีการที่ง่ายโดยการนำเศษมาบวกหรือมาลบกัน และนำส่วนมาบวกหรือมาลบกันเลยเพื่อให้ได้คำตอบ ซึ่งสาเหตุเกิดจากการที่นักเรียนเรียนรู้เรื่องเศษส่วนโดยไม่มีความเข้าใจแต่จะเป็นการเรียนในลักษณะการจำมากกว่า ซึ่งครูควรจะทำหน้าที่ในการจัดการเรียนการสอนเพื่อให้นักเรียนได้มีมโนคติที่ถูกต้องเกี่ยวกับเศษส่วน

2) ด้านการขาดการตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา ลักษณะที่พบมากที่สุดคือนักเรียนไม่ตรวจสอบคำตอบสุดท้ายว่าถูกต้องหรือไม่ เช่น ไม่ตอบให้อยู่ในรูปเศษส่วนอย่างต่ำ และนอกจากนี้ยังพบว่านักเรียนไม่ตรวจสอบในระหว่างการดำเนินการแสดงวิธีการคิดที่ผิดแต่คำตอบที่นักเรียนได้กลับถูกต้องพบมากในเรื่องการลบเศษส่วน เนื่องจากนักเรียนไม่ได้ตรวจสอบว่าถ้าสลับตำแหน่งการลบเศษส่วนที่ได้ผลลัพธ์ก็จะตรงข้ามทันทีเพราะการลบไม่มีสมบัติการสลับที่ สาเหตุเกิดจากนักเรียนไม่มีความรู้เกี่ยวกับสมบัติของการลบซึ่งครูควรจะมีการทบทวนในเรื่องการบวกและการลบจำนวนจริงก่อนเพื่อให้นักเรียนได้มีความเข้าใจเกี่ยวกับสมบัติการบวกและการลบ

3) ด้านการตีความด้านภาษา ลักษณะที่พบมากที่สุดคือนักเรียนไม่สามารถเขียนประโยคสัญลักษณ์จากที่โจทย์กำหนดให้ได้ทำให้นักเรียนดำเนินการผิดพลาดตามไปด้วย สาเหตุเกิดจากนักเรียนไม่เข้าใจความหมายของคำสิ่งที่ครูให้ หรือเกิดความสับสนในบางประโยค

4) ด้านการใช้ข้อมูลผิด เป็นลักษณะของบทพร้อมที่เกิดจากนักเรียนเฉลยโดยการหาคำตอบจากสิ่งที่โจทย์ไม่ต้องการ ซึ่งสาเหตุเกิดจากนักเรียนไม่ตรวจสอบว่าโจทย์ต้องการคำตอบคืออะไร และสิ่งที่จะนำมาใช้ในการหาคำตอบคือข้อมูลใด ซึ่งครูควรจะมีการเน้นย้ำในระหว่างการจัดการเรียนการสอนเพื่อให้นักเรียนเกิดความรอบคอบซึ่งจะนำไปสู่การแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง

5) ด้านข้อผิดพลาดในเทคนิคการทำ เป็นลักษณะข้อบกพร่องที่เกิดการคิดคำนวณตัวเลขที่ผิดพลาดของนักเรียน สาเหตุเกิดจากนักเรียนท่องสูตรคูณไม่ได้ รวมไปถึงนักเรียนบวกเลขเร็ว หรือนักเรียนบางคนชอบคิดเลขในใจทำให้เกิดความผิดพลาด ซึ่งครูควรฝึกให้นักเรียนตรวจสอบการคิดเลขว่าผิดพลาดหรือไม่ หรือฝึกให้นักเรียนตรวจสอบคำตอบที่ได้อย่างรอบคอบซึ่งจะส่งผลให้นักเรียนคิดเลขได้อย่างแม่นยำ

ด้านมโนคติที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน พบว่านักเรียนเกิดมโนคติอยู่ 3 ลักษณะพบมากที่สุด ได้แก่

1) มโนคติที่คลาดเคลื่อน เป็นลักษณะที่นักเรียนมีความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนในทฤษฎีบท วิธีการหาคำตอบของนักเรียนที่แสดงถึงความเข้าใจที่ไม่สอดคล้องหรือคลาดเคลื่อนจากมโนคติที่เป็นที่ยอมรับและไม่สอดคล้องกับมโนคติของนักคณิตศาสตร์ เช่นนักเรียนมีความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนในทฤษฎีบท กฎสูตร บทนิยามและสมบัติ วิธีการหาคำตอบของนักเรียนแสดงถึงความไม่สอดคล้องหรือคลาดเคลื่อนจากมโนคติที่เป็นที่ยอมรับ และไม่สอดคล้องกับมโนคติของนักคณิตศาสตร์ เข้าใจที่คลาดเคลื่อน ซึ่งสาเหตุเกิดจากนักเรียนมีความเข้าใจที่ไม่ถูกต้องเกี่ยวกับการบวกและการลบเศษส่วนซึ่งจะส่งไปไปสู่การหาคำตอบของนักเรียนที่ผิดพลาดตามไปด้วย

2) มโนคติเชิงคณิตศาสตร์แบบไม่สมบูรณ์ นักเรียนมีความเข้าใจที่ถูกต้องแต่ยังไม่สมบูรณ์ในการหาคำตอบการบวกและการลบเศษส่วน หรือมีวิธีการแก้โจทย์ปัญหาที่แสดงว่ามีมโนคติที่สอดคล้องกับมโนคติที่เป็นที่ยอมรับและสอดคล้องกับมโนคติของนักคณิตศาสตร์ อย่างน้อย 1 องค์ประกอบ

3) ไม่เข้าใจมโนคติเชิงคณิตศาสตร์ ลักษณะคือนักเรียนไม่สามารถหาคำตอบในเรื่องการบวกและการลบเศษส่วนได้ หรือนักเรียนตอบคำถามในลักษณะทวนคำถามหรือตอบคำถามไม่ตรงประเด็น รวมไปถึงการไม่ตอบคำถามเลย สาเหตุเกิดจากนักเรียนไม่เข้าใจว่าสิ่งที่โจทย์ถามคืออะไร หรืองานที่ได้รับมอบหมายต้องแก้ปัญหาอย่างไร ซึ่งการตอบคำถามของเรียนจึงเป็นไปในลักษณะเขียนเดาไปเพื่อให้ได้คำตอบคำถามทำให้นักเรียนไม่ได้คำตอบตามที่ต้องการ

ข้อเสนอแนะในการวิจัยครั้งต่อไป

1. การศึกษาข้อบกพร่องและมโนคติที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ในเนื้อหาหรือระดับชั้นอื่นๆ

2. การศึกษาปัจจัยและสาเหตุของข้อบกพร่องและมโนคติที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์เพื่อหาแนวทางแก้ไข

กิตติกรรมประกาศ

ผลงานวิจัยนี้ได้รับการสนับสนุนการวิจัย (บางส่วน) จากศูนย์ความเป็นเลิศด้านคณิตศาสตร์ สำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา ประเทศไทย

เอกสารอ้างอิง

- เกษสุดา ร่องเมือง. ความเข้าใจเรื่องเศษส่วนของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ในโรงเรียนประถมศึกษา อำเภอเมือง จังหวัดขอนแก่น [วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการประถมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย].
ขอนแก่น: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยขอนแก่น; 2538.
- ไข่มุก เลื่องสุนทร. การศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับจำนวน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ในโรงเรียนสังกัดเขตพื้นที่การศึกษาราชบุรี เขต 1 [วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์]. กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย; 2552.
- จาริณี อิ่มด้วง. การศึกษาระดับความเข้าใจเชิงมโนคติเรื่อง การบวกและการลบเศษส่วนของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ตามกรอบทฤษฎีของ PIRIE และ KIEREN [วิทยานิพนธ์ปริญญา ศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา].

ขอนแก่น: บัณฑิตวิทยาลัย

มหาวิทยาลัยขอนแก่น; 2550.

ทัศนีย์ บุญโย. การปรับเปลี่ยนมโนคติเรื่องเศษส่วน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad [วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา].
ขอนแก่น: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยขอนแก่น; 2553.

ธัญญารัตน์ จุ่มแพง. ได้ศึกษาการเปลี่ยนแปลงมโนคติ และระดับความเข้าใจทางเรขาคณิตของนักเรียนตามกรอบทฤษฎีของ van Hiele เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 [วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา].

ขอนแก่น: บัณฑิตวิทยาลัย

มหาวิทยาลัยขอนแก่น; 2555.

นิวัฒน์ ศรีสวัสดิ์. การปรับเปลี่ยนมโนคติเรื่องแรงและกฎการเคลื่อนที่ โดยใช้การจัดการเรียนรู้บนเครือข่ายที่พัฒนาตามแนวทฤษฎีคอนสตรัคติวิซึม [วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิทยาศาสตร์ศึกษา].

ขอนแก่น: บัณฑิตวิทยาลัย

มหาวิทยาลัยขอนแก่น; 2548.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.

ครุคณิตศาสตร์มีอาชีพ: เส้นทางสู่ความสำเร็จ. กรุงเทพฯ: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ; 2555.

_____. ผลการประเมิน PISA 2012 คณิตศาสตร์ การอ่าน และวิทยาศาสตร์ บทสรุปสำหรับผู้บริหาร. กรุงเทพฯ: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ; 2556

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ. แผนพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ ฉบับที่ 11



- (พ.ศ. 2555-2559). กรุงเทพฯ: สำนักงาน
คณะกรรมการพัฒนาการเศรษฐกิจและสังคม
แห่งชาติ; 2545.
- สำนักงานวิชาการและมาตรฐานการศึกษา
กระทรวงศึกษาธิการ. หลักสูตรแกนกลาง
การศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.
กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ชุมนุมชนสหกรณ์การเกษตร
แห่งประเทศไทย; 2551.
- อัมพร มีาคะนอง. คณิตศาสตร์: การสอนและการเรียนรู้.
กรุงเทพฯ: ศูนย์ตำราและเอกสารทางวิชาการ
คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย;
2546.
- _____. ประมวลบทความหลักการและแนวทางการ
จัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้
คณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: บริษัทกริมพ์; 2547.
- Drews, D. Children's errors in mathematics :
Understanding common misconception in
primary schools. Great Britain: Learning
Matters; 2005.
- Egodawatte, G. Secondary School Students'
Missconception in Algebra. Pg.D.
Dissertation, University of Toronto, Canada;
2011.
- Lucariello, J., Tine, M.T., and Ganley, C.M.
A Formative Assessment of Students'
Algebraic Variable Misconceptions. The
Journal of Mathematical Behavior 2014; 33:
30-41.
- Movshovitz, H.N. and others. An Empirical
Classification Model for Errors in High
School Mathematics. Journal for Research in
Mathematics Education 1987; 18(1): 3-14.
- Ozkan, E.M. Misconceptions in Radicals in School
Mathematics. Procedia Social Behavioral
Science 2011; 15: 120-127.