

$$\begin{cases} (u_1^{k+1})_{i,j} + \gamma_1 \tau F(u_1^{k+1})_{i,j} + \alpha \tau \nabla \cdot (D_1(u_1^k) \nabla u_1^{k+1})_{i,j} = \gamma_1 \tau F(u_1^k)_{i,j} \\ \quad + (u_1^k)_{i,j} - \tau [f_1(u_1^k)_{i,j} + \alpha \nabla \cdot \mathbf{B}_1^k] \\ (u_2^{k+1})_{i,j} + \gamma_2 \tau F(u_2^{k+1})_{i,j} + \alpha \tau \nabla \cdot (D_2(u_2^k) \nabla u_2^{k+1})_{i,j} = \gamma_2 \tau F(u_2^k)_{i,j} \\ \quad + (u_2^k)_{i,j} - \tau [f_2(u_2^k)_{i,j} + \alpha \nabla \cdot \mathbf{B}_2^k] \end{cases} \quad (17)$$

โดยที่ $\gamma_l > 0$ และ $F(u_l)$ เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ (differential operator) ที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันนัลแบบคอนเวกซ์ (convex functional) ซึ่งในที่นี้ได้เลือกใช้ $\int_{\Omega} \sqrt{|\nabla u_l|^2 + \beta} dx$ เนื่องจากสามารถแก้ปัญหาการลงทะเบียนภาพที่ต้องการการแปลงรูปทั้งแบบเรียบและแบบไม่เรียบได้ดี เพราะฉะนั้น $F(u_l) = \nabla \cdot \frac{\nabla u_l}{\sqrt{|\nabla u_l|^2 + \beta}}$ เราจะเรียกกระบวนการเดินเวลาใน (17) ว่ารูปแบบการเดินเวลาถึงไม่ขัดแย้งซึ่งถูกทำให้เสถียร (stabilized semi-implicit time marching scheme: SSITM)

ในทำนองเดียวกัน ระบบสมการ (17) สามารถถูกเขียนในรูประบบสมการเมทริกซ์-เวกเตอร์ได้เป็น

$$\begin{cases} (\mathbf{I} + \bar{\mathbf{A}}_1^k) \mathbf{u}_1^{k+1} = \bar{\mathbf{b}}_1 \\ (\mathbf{I} + \bar{\mathbf{A}}_2^k) \mathbf{u}_2^{k+1} = \bar{\mathbf{b}}_2 \end{cases} \quad (18)$$

โดยที่ $\bar{\mathbf{A}}_l^k$ เป็นเมทริกซ์ที่มากไปด้วยเลขศูนย์ขนาด $n^2 \times n^2$ ที่กำหนดจากเทอมที่สองและสามทางซ้ายมือ และ $\bar{\mathbf{b}}_l^k \in \mathbb{R}^{n^2}$ เป็นเวกเตอร์ที่กำหนดจากเทอมทางขวามือของ (17) ตามลำดับ

ผลการวิจัย

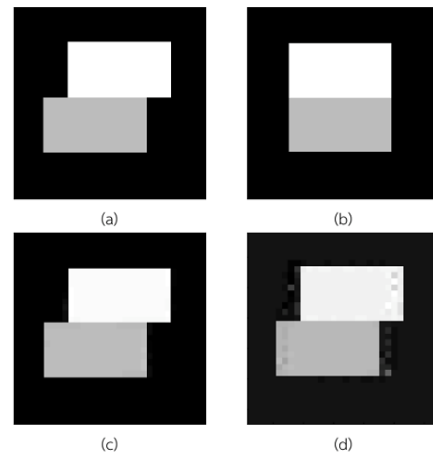
การทดลองเชิงตัวเลขได้ถูกออกแบบเพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของการลงทะเบียนภาพที่ใช้เคิร์ฟเวเจอร์แบบเกาส์เซียนโดยใช้วิธีการเดินเวลาแบบ SITM และ SSITM ทั้งนี้ความแม่นยำของวิธีการทั้งสองจะถูกตรวจวัดโดยร้อยละของความแตกต่างสัมพัทธ์ระหว่างภาพที่กำลังถูกลงทะเบียน R และ T_{u^k} ซึ่งนิยามโดย

$$\text{RelSSD}(k) = \frac{\sum_{i,j} ((T_{u^k})_{i,j} - (R)_{i,j})}{\sum_{i,j} ((T)_{i,j} - (R)_{i,j})} \times 100$$

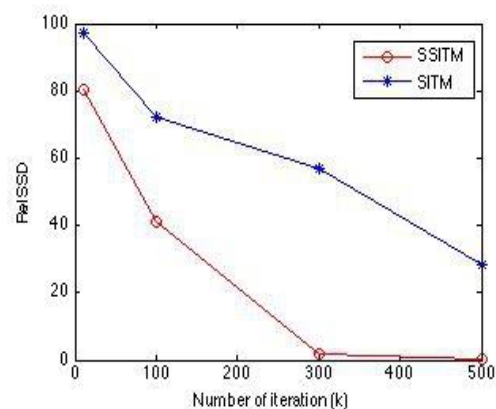
การทดลองเชิงตัวเลขทั้งหมดจะถูกหยุดถ้าเกณฑ์การหยุดข้อใดข้อหนึ่งต่อไปเป็นจริง

1. $\text{RelSSD}(k) < 0.05$
2. $|\text{RelSSD}(k+1) - \text{RelSSD}(k)| < 10^{-16}$
3. $k \geq 10000$

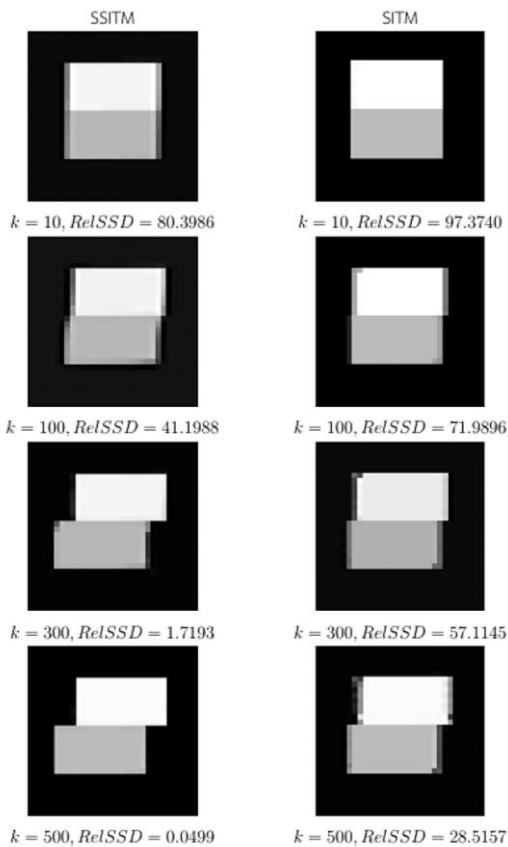
ในทุกการทดลองเชิงตัวเลขได้ถูกประมวลผลด้วยโปรแกรม MATLAB R2011a ด้วยระบบปฏิบัติการ OS X Mavericks บนเครื่องคอมพิวเตอร์แบบพกพา MacBook Pro CPU 2.4GHz และ RAM 8 GB



ภาพที่ 1 แสดงปัญหาการลงทะเบียนภาพสังเคราะห์ที่ต้องการการแปลงรูปแบบไม่เรียบ โดย (a) แทนภาพอ้างอิง (b) แทนภาพแม่แบบ (c) และ (d) แทนผลการลงทะเบียนภาพโดยวิธีการ SSITM และ SITM ตามลำดับ โดยใช้พารามิเตอร์ดังนี้ $\alpha = 10^{-6}, \tau = 10^{-2}, \beta = 10^{-2}, \gamma_1 = \gamma_2 = 1000$



ภาพที่ 2 แสดงการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการ SSITM และ SITM ในการลงทะเบียนภาพสังเคราะห์ในภาพที่ 1 (a)-(b) เพื่อให้ $\text{RelSSD}(k)$ ต่ำกว่า 0.05 (ความแตกต่างระหว่างภาพที่กำลังถูกลงทะเบียน R และ T_{u^k} น้อยกว่าร้อยละ 5)



ภาพที่ 3 แสดงผลการลงทะเบียนภาพโดยวิธีการ SSITM และ SITM เมื่อ $k = 10, 100, 300, 500$

จากภาพที่ 1-3 เห็นได้ชัดว่าวิธีการ SSITM ให้ผลการลงทะเบียนภาพที่รวดเร็ว น่าเชื่อถือ และแม่นยำกว่าวิธีการ SITM

อภิปรายและสรุปผลการวิจัย

ผลการทดลองเชิงตัวเลขบนภาพสังเคราะห์ชี้ให้เห็นว่าการลงทะเบียนภาพเคิร์ฟเวเจอร์แบบเกาส์เซียนโดยใช้วิธีการเดินเวลาดึงไม่ชัดแจ้งที่ถูกทำให้เสถียรให้ผลการลงทะเบียนภาพที่มีประสิทธิภาพสูงกว่าและมีความเร็วกว่าวิธีการเดินเวลาดึงไม่ชัดแจ้งอย่างมีนัยสำคัญ นอกจากนี้ผลการวิจัยที่ได้ยังสามารถนำไปต่อยอดเชิงพาณิชย์สำหรับผลิตโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อทำการลงทะเบียนภาพทางการแพทย์สำหรับช่วยในการตรวจวินิจฉัยโรค

กิตติกรรมประกาศ

การวิจัยนี้ได้รับความสนับสนุนจากภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร และโครงการพัฒนาและส่งเสริมผู้มีความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

เอกสารอ้างอิง

Broit C. Optimal registration of deformed image. Ph.D. thesis, Computer and Information Science. United States: University of Pennsylvania; 1981.

Chumchob N, Chen K, Brito-Loeza C. 2011. A fourth order variational image registration model and its fast multigrid algorithm. SIAM Multiscale Modeling and Simulation. 9(1): 89-128.

Fischer B, Modersitzki J. 2002. Fast diffusion registration. Contemporary Mathematics. 313: 117-129.

Fischer B, Modersitzki J. 2003. Curvature based image registration. Journal of Mathematics Imaging and Vision. 18: 81-85.

Frohn-Schouf C, Henn S, Homke L, Witsch K. Total variation based image registration. The International Conference on PDE Based Image Processing and Related Inverse Problems Series: Mathematics and Visualization, Springer Verlag. p.305-323.

Mazlinda I, Chen K, Brito-Loeza C. 2014. A novel variational model for image registration using Gaussian curvature. Geometry Imaging and Computing. 1(4): 417-446.

Modersitzki J. Numerical method for image registration. Oxford University. 2004.