

การเชื่อมโยงการคิดทางพีชคณิตกับการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
ในชั้นเรียนที่ใช้วิธีการแบบเปิด

Connection of Algebraic Thinking and Geometric Thinking of Students Grade 10
in Classroom using Open Approach

ศรีประภา บุญหล้า (Seepapha Boonla)* เอื้อจิตร พัฒนจักร (Aaijit Pattanajak)**

บทคัดย่อ

การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อสำรวจการเชื่อมโยงการคิดทางพีชคณิตกับการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์ในชั้นเรียนที่ใช้วิธีการแบบเปิด โดยใช้ระเบียบวิธีวิจัยเชิงคุณภาพด้วยการทดลองเชิงการสอน โดยใช้วิธีการแบบเปิดตามแนวคิดของ Inprasitha (2011) โดยมีเครื่องมือที่ใช้เก็บรวบรวมข้อมูลประกอบด้วย แผนการจัดการเรียนรู้เรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์จำนวน 6 แผน เครื่องบันทึกวีดิทัศน์ เครื่องบันทึกเสียง เครื่องบันทึกภาพนิ่ง แบบบันทึกภาคสนาม ซึ่งมีกลุ่มเป้าหมายเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ปีการศึกษา 2558 จำนวน 3 กลุ่ม กลุ่มละ 3 คน ซึ่งเป็นชั้นเรียนที่นำวิธีการแบบเปิดมาจัดการเรียนการสอนเพื่อเน้นให้นักเรียนแก้ปัญหาด้วยตัวเอง และวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้กรอบแนวคิดของ Businskas (2008) ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีการเชื่อมโยงการคิดทางพีชคณิตและการคิดทางเรขาคณิตทั้ง 7 ประเภท ดังนี้ การแสดงแทนสำรอง การแสดงแทนเทียบเท่า การใช้คุณสมบัติทั่วไป การรวมเข้าไว้ด้วยกัน รูปแบบทั่วไป การให้ความหมายโดยนัย และกระบวนการ ในการแก้ปัญหาเรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์

ABSTRACT

This research aims to explore the connection of algebraic thinking and geometric thinking of 10th grade students in classroom using Open Approach. The paper utilized the qualitative method with teaching experiment using Open Approach according to Inprasitha (2011). The data was collected by using lesson plans, video recorder, audio tape recorder, camera, field note. The target group is 10th grade students in school year 2015, 3 groups of 3 student, who attended in the classroom teaching by using Open Approach that encourage student to solve problem by their own selves. The data was analyzed by using framework of Businskas (2008). The results showed that students can connect between algebraic and geometric thinking 7 types to display Alternate representation, Equivalent representation, Common features, Inclusion, Generalization, Implication and Procedure to solve problems of analytic geometry.

คำสำคัญ : การเชื่อมโยง การคิดทางพีชคณิต การคิดทางเรขาคณิต

KeyWords : Connection, Algebraic thinking, Geometric thinking

* นักศึกษา หลักสูตรศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

** รองศาสตราจารย์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

บทนำ

หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน 2551 มุ่งให้ผู้เรียนเกิดสมรรถนะสำคัญ 5 ประการ ดังนี้ ความสามารถในการสื่อสาร ความสามารถในการคิด ความสามารถในการแก้ปัญหา ความสามารถในการใช้ทักษะชีวิต ความสามารถในการใช้เทคโนโลยี ซึ่งความสามารถในการคิด เป็นความสามารถในการคิดวิเคราะห์ การคิดสังเคราะห์ การคิดอย่างสร้างสรรค์ การคิดอย่างมีวิจารณญาณ และการคิดเป็นระบบ เพื่อนำไปสู่การสร้างองค์ความรู้หรือสารสนเทศเพื่อการตัดสินใจเกี่ยวกับตนเองและสังคมได้อย่างเหมาะสม คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วน รอบคอบช่วยให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหา และนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างถูกต้อง เหมาะสม นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยีและศาสตร์อื่น ๆ คณิตศาสตร์จึงมีประโยชน์ต่อการดำเนินชีวิต ช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น และสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข (กระทรวงศึกษาธิการ, 2551) การคิดทางคณิตศาสตร์แบ่งออกเป็น 3 ประเภท คือ (1) การคิดทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับวิธีการทางคณิตศาสตร์ (2) การคิดทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ (3) ทักษะคิดทางคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เป็นนามธรรม การใช้เหตุผล กระบวนการคิด และการแก้ปัญหา คณิตศาสตร์จึงเป็นวิชาที่ช่วยเสริมสร้างให้นักเรียนเป็นคนที่มีเหตุผล มีการคิดอย่างมีวิจารณญาณและเป็นระบบ ตลอดจนมีทักษะการแก้ปัญหา

การคิดทางพีชคณิตเป็นองค์ประกอบที่สำคัญและเป็นพื้นฐานของการคิดและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเกี่ยวข้องกับการรับรู้รูปแบบและความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ทั่วไป ท่ามกลางจำนวน วัตถุและรูปทรงเรขาคณิต (Windsor, 2009) Booker (2009) กล่าวว่า การคิดทางพีชคณิตเน้นเกี่ยวกับลักษณะต่างๆ ไป จาก รูปแบบ วิธีการของความสัมพันธ์ที่แสดงออกและการวิเคราะห์ตามส่วนของการเปลี่ยนแปลงที่มองเห็นได้ การสร้างวิธีการของการคิดซึ่งแปลงการเชื่อมโยงท่ามกลางหัวข้อที่หลากหลายและการเตรียมสำหรับเนื้อหาต่างๆมากมาย การพิสูจน์และการอธิบายคุณสมบัติต่างๆของการคิดทางพีชคณิต เช่น สัญลักษณ์ ความสัมพันธ์และสิ่งที่เป็นนามธรรมทางคณิตศาสตร์ ให้พีชคณิตเครื่องมือที่มีประสิทธิภาพสำหรับการทำงานเข้าใจโดเมนอื่น ๆ ของคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีที่เป็นเรขาคณิต กระบวนการที่เป็นนามธรรมมีความซับซ้อน โดยเฉพาะอย่างยิ่งที่เกี่ยวข้องกับกระบวนการทางความรู้หลายอย่างซึ่งมันคุ้มค่าที่จะทำความเข้าใจ ในขณะที่เดียวกัน Pierre Marie van Hiele และ Dina van Hiele Gelgof สองสามีภรรยาชาวเนเธอร์แลนด์ ผู้เป็น สามีได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียน โดยได้กำหนดระดับการคิดออกเป็น 5 ระดับ คือ ระดับที่ 1 การรับรู้จากการมองเห็น (Visualization, or Recognition) ระดับที่ 2 การวิเคราะห์หรือการพรรณนารูปลักษณะ (Analysis, Description) ระดับที่ 3 การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผน (Informal deduction, or Ordering) ระดับที่ 4 การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างเป็นแบบแผน (Formal deduction) และระดับที่ 5 การเป็นนามธรรม (Rigor) การใช้งานของการแสดงหลายส่วนประกอบที่ได้รับการยอมรับของการคิดทางพีชคณิตจะเชื่อมโยงอย่างชัดเจนกับการคิดทางเรขาคณิตและในความเป็นจริงมีโอกาสที่จะเชื่อมโยงกันแนวคิดจากทั้งพีชคณิตและเรขาคณิต (Duval, 1998) แต่การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนไทยในปัจจุบัน ยังคงเน้นการคิดคำนวณท่องจำเนื้อหาตามที่ครูบอก การสอนเนื้อหาส่วนใหญ่เป็นพวกกฎ สูตร หลักการทางคณิตศาสตร์และการให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดจำนวนมากเพื่อให้จำเนื้อหา การจัดการเรียนการสอนดังกล่าวเป็นการสอนที่เทียบได้กับการบอกคณิตศาสตร์

(Talking Mathematics) เท่านั้น การสอนในลักษณะนี้นอกจากจะไม่ได้ส่งเสริมการคิดอย่างมีเหตุผลแล้วยังเป็นการทำลายความคิดริเริ่มและความคิดสร้างสรรค์ของนักเรียนอีกด้วย (Dindyal, 2005)

การนำวิธีการแบบเปิดเป็นวิธีการการเรียนการสอนที่เป็นเครื่องมือในการสนับสนุนการแก้ปัญหาของนักเรียนและเข้าใจเนื้อหาจากการแก้ปัญหา การจัดการเรียนรู้โดยใช้วิธีการแบบเปิด (Open Approach) เป็นวิธีการสอนที่มีเป้าหมายเพื่อให้ให้นักเรียนเปิดใจในการเรียนจากมุมมองที่หลากหลายจากปัญหาปลายเปิดที่เป็นสถานการณ์ปัญหาซึ่งมีความหลากหลายทั้งวิธีการและคำตอบ และปัญหาที่คั่นนั้นควรที่จะช่วยส่งเสริมให้นักเรียนเกิดความเข้าใจมากยิ่งขึ้น การเรียนการสอนที่ใช้สถานการณ์ปัญหาปลายเปิดเป็นการส่งเสริมให้นักเรียนมีอิสระในการคิดในการทำกิจกรรมและแก้สถานการณ์ปัญหา โดยมุ่งเน้นให้นักเรียนมีอิสระที่จะคิดที่จะแสดงออก และแสดงความคิดเห็นที่แตกต่าง นอกจากนี้ นักเรียนยังสามารถที่จะนำไปใช้ในการแก้ปัญหาอื่นๆ ได้ด้วย และ Inprasitha (2011) ได้พัฒนาวิธีการแบบเปิดที่เป็นวิธีการสอนมี 4 ขั้นตอนคือ 1) การนำเสนอปัญหาปลายเปิด 2) การเรียนรู้ด้วยตนเองของนักเรียน 3) การอภิปรายและเปรียบเทียบร่วมกันทั้งชั้นเรียน 4) การสรุปการเชื่อมโยงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เกิดขึ้นในชั้นเรียน (Inprasitha, 2011) นอกจากนี้วิธีการแบบเปิดยังเป็นวิธีการสอนที่มีการมุ่งเน้นความหลากหลายของแนวทางในการคิดของนักเรียน หรืออาจกล่าวได้ว่าเป็นการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน การเชื่อมโยงเป็นเครื่องมือในกระบวนการแก้ปัญหา ดังนั้น งานของครูก็ต้องสนับสนุนให้นักเรียนใช้การเชื่อมโยงในการแก้ปัญหา (Hiebert and Carpenter, 1992) และการเรียนการสอนในชั้นเรียนจะต้องส่งผลให้นักเรียนสามารถสร้างและนำการเชื่อมโยงไปใช้ในกระบวนการแก้ปัญหาได้ (Hodgson, 1995) มาตรฐานการเชื่อมโยงเป็นหลักสูตรการเรียนการสอนตั้งแต่ชั้นอนุบาลถึงชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ซึ่งจะช่วยให้ทุกคนสามารถ 1. ตระหนักและใช้การเชื่อมโยงระหว่างแนวคิดทางคณิตศาสตร์ 2. เข้าใจวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงระหว่างความคิดและสามารถสร้างสิ่งหนึ่งที่ทำให้เชื่อมโยงไปหาสิ่งอื่นๆ ทั้งหมดได้ 3. ตระหนักและนำคณิตศาสตร์ไปใช้ในบริบทอื่นของคณิตศาสตร์ (NCTM, 2000)

การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งสำคัญที่กำหนดไว้ในวัตถุประสงค์ของหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับโรงเรียน (NCTM, 2000) และมาตรฐานของสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ให้ความสนใจไปที่ความสามารถของนักเรียนในการเชื่อมโยงความรู้ซึ่งเป็นมาตรฐานหนึ่งของสาระทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่กำหนดไว้ในหลักสูตรคณิตศาสตร์ในประเทศไทย (Jaijan and Loipha, 2014) การเชื่อมโยงเป็นกิจกรรมที่สำคัญสำหรับทั้งครูผู้สอนและนักเรียน (Mousley, 2004) โดยเปิดโอกาสให้นักเรียนในการสร้างหรือนำเสนอคณิตศาสตร์รูปแบบใหม่เหมือนกับว่าคณิตศาสตร์เป็นกิจกรรมของมนุษย์ (Pilgrim and Bloemker, 2016) นั่นคือผู้เรียนจะต้องรู้จักสร้างการเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่เป็นรูปธรรมได้แก่รูปภาพ สัญลักษณ์และมโนคติ กับกระบวนการรวมเนื้อหาและวิธีการต่างๆ ทางคณิตศาสตร์เข้าด้วยกัน และจะต้องรู้จักสร้างการเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับชีวิตจริง (Kennedy and Tipps, 1994) กิจกรรมการแก้ปัญหาจากโลกจริงค่อยๆ เคลื่อนที่เข้าไปทั่วโลกทางคณิตศาสตร์โดยใช้วิธีตามธรรมชาติในการค้นหาการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ การสร้างสถานการณ์เชื่อมโยงเพื่อการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์โดยการจัดระบบประสบการณ์การเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ซึ่งขึ้นอยู่กับลักษณะทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในแต่ละระดับชั้นที่จะต้องเผชิญกับคณิตศาสตร์ที่มีความหลากหลายในบริบทของโลกของความเป็นจริง ซึ่งวัตถุประสงค์เป็นรูปธรรมเป็นส่วนหนึ่งในการช่วยให้นักเรียนเข้าถึงการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์และการอธิบายความสัมพันธ์ของสัญลักษณ์โดยใช้สิ่งต่างๆ รอบตัวในระบโรงเรียน นักเรียนควรเชื่อมโยงคณิตศาสตร์ในสิ่งที่พวกเขาได้ศึกษาจากบทเรียนหนึ่งไปยังบทเรียนถัดไป

ในส่วนของเรขาคณิตพีชคณิตและมีประวัติศาสตร์ทางการเชื่อมโยงที่เหนียวแน่น มีศึกษาการมากมายที่ตรวจสอบการเชื่อมโยงระหว่างพีชคณิตและเรขาคณิต (Lee and Wheeler, 1989) พีชคณิตและเรขาคณิตถือว่าเป็นสองเรื่องหลักของหลักสูตรคณิตศาสตร์ทั่วโลกและถือว่าเป็นสองเสาหลักที่สำคัญของของคณิตศาสตร์ สิ่งสามารถแบ่งระหว่างพีชคณิตและเรขาคณิต คือ "พีชคณิตที่เกี่ยวข้องกับการจัดการ และเรขาคณิตที่เกี่ยวข้องกับพื้นที่ (Atiyah, 2001) โดยทั่วไป การเรียนการสอนเรขาคณิตเป็นที่ยอมรับโดยเฉพาะอย่างยิ่งการสร้างการพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่ซับซ้อนมากขึ้นและมักจะประสบความสำเร็จน้อยกว่าการเรียนการสอนการดำเนินการเกี่ยวกับตัวเลขตัวเลขหรือพีชคณิต (Duval, 1998) นักเรียนในโรงเรียนมัธยมต้องพบเจอกับความยากลำบากอย่างมากในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตเกี่ยวกับการมีปฏิสัมพันธ์ระหว่างวิธีการทางเรขาคณิตและการวิเคราะห์ อาจจะเป็นเพราะความเข้าใจที่มีเพียงเล็กน้อยเกี่ยวกับแนวความคิดทางเรขาคณิตจากระดับชั้นที่เรียนก่อนหน้านี้อะและหลายปัจจัยที่มีส่วนในการทำให้ความเข้าใจและการแสดงออกของนักเรียนเกี่ยวกับเรขาคณิตไม่เพียงพอ มีหลายปัจจัยที่ชี้ให้เห็นว่ามีผลกระทบต่อวิธีการทำความเข้าใจและดำเนินการเกี่ยวกับงานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน (Dindyal, 2005) ทั้งพีชคณิตและเรขาคณิตอนุญาตให้มีการแสดงหลายแนวคิดซึ่งนักวิจัยเห็นด้วยและศึกษาเพิ่มเติมไปสู่การพัฒนาความเข้าใจแนวคิดให้ โอกาสที่จะใช้สัญลักษณ์ไปยังโลกจริงและในที่สุดก็ช่วยให้ความยืดหยุ่นในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ การใช้งานของการแสดงหลายส่วนประกอบที่ได้รับการยอมรับของการคิดเชิงพีชคณิตจะเชื่อมโยงอย่างชัดเจนกับความคิดทางเรขาคณิตและในความเป็นจริงมีโอกาสที่จะเชื่อมโยงกันแนวคิดจากทั้งพีชคณิตและเรขาคณิต (Duval, 1998)

จากที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นว่า นักเรียนมีจำนวนไม่น้อยที่มีปัญหาด้านการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นมาตรฐานหนึ่งของสาระทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่กำหนดไว้ในหลักสูตรคณิตศาสตร์ในประเทศไทย ดังนั้น การศึกษารังนี้จึงได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับการเชื่อมโยงการคิดทางพีชคณิตและการคิดทางเรขาคณิตในการแก้ปัญหาเรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์ในชั้นเรียนที่ใช้วิธีการเปิดของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 นอกจากนี้จะศึกษาว่านักเรียนเชื่อมโยงการคิดทางพีชคณิตและเรขาคณิตแล้วยังสำรวจว่าการเชื่อมโยงนี้ส่งเสริมความเข้าใจของนักเรียนและนักเรียนสามารถแก้ปัญหาอย่างมีประสิทธิภาพเรขาคณิต

วัตถุประสงค์การวิจัย

เพื่อสำรวจการเชื่อมโยงความคิดพีชคณิตกับการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในชั้นเรียนที่ใช้วิธีการแบบเปิด

วิธีการวิจัย

กลุ่มเป้าหมาย

ใช้ระเบียบวิธีวิจัยเชิงคุณภาพที่เน้นการสังเกต และการวิเคราะห์ข้อมูล ในการแก้ปัญหของนักเรียน โดยใช้การเรียนการสอนวิธีการแบบเปิดนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4/5 ปีการศึกษา 2558 ภาคเรียนที่ 2 โรงเรียนสตรีชัยภูมิ อำเภอเมือง จังหวัดชัยภูมิ จำนวน 3 กลุ่ม กลุ่มละ 3 คน กลุ่มเป้าหมายนี้ผู้วิจัยได้ทำการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนที่ใช้วิธีการแบบเปิดเป็นระยะเวลา 1 ปีการศึกษา

ขอบเขตทางด้านเนื้อหา

เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้คือ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ซึ่งเป็นเนื้อหาที่อยู่ในรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และในการเก็บข้อมูลวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยใช้แผนการจัดการเรียนรู้เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ จำนวน 8 แผนการจัดการเรียนรู้ที่มีการใช้ความรู้ทางพีชคณิตร่วมอยู่ในการเรียนการสอนด้วย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือในการวิจัย ประกอบด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลและเครื่องมือที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล

1.1 เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล

1.1.1 แผนการจัดการเรียนรู้ที่สร้าง โดยใช้วิธีการแบบเปิดเรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์ จำนวน 6 แผน ผู้วิจัยและผู้ช่วยวิจัยร่วมกันสังเคราะห์รายการคำถามเพื่อสร้างรายการคำถามที่ส่งเสริมการคิดทางคณิตศาสตร์ที่ปรับให้เข้ากับบริบทของชั้นเรียน แล้วนำรายการคำถามที่ได้กำหนดเป็น โครงสร้างในการสร้างแผนการจัดการเรียนรู้ และร่วมกันสร้างแผนการจัดการเรียนรู้เรื่องความน่าจะเป็น ตามกระบวนการของวิธีการแบบเปิดตามแนวคิดของ Inprasitha (2011)

1.1.2 แบบบันทึกภาคสนาม ใช้บันทึกลักษณะอาการ การกระทำ คำพูด การให้เหตุผล พฤติกรรม ของนักเรียนกลุ่มเป้าหมายที่สามารถสังเกตได้ในขณะที่นักเรียนแก้ปัญหาและเขียนอธิบายการแก้ปัญหา เพื่อใช้เป็นข้อมูลในการประกอบการวิเคราะห์

1.1.3 ใบกิจกรรม เป็นใบงานที่ให้นักเรียนขีด เขียน ทด วาดรูป แสดงแนวคิด

1.2 อุปกรณ์ที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล

1.2.1 เครื่องมือบันทึกวิดีโอ ใช้บันทึกวิดีโอในระหว่างที่นักเรียนแก้ปัญหาตั้งแต่เริ่มจนถึงสิ้นสุดการแก้ปัญหา โดยบันทึกเหตุการณ์ภาพรวม ภาพระยะใกล้ของกลุ่มเป้าหมาย

1.2.2 เครื่องมือบันทึกภาพนิ่ง ใช้บันทึกภาพนิ่งในระหว่างที่นักเรียนแก้ปัญหาตั้งแต่เริ่มจนถึงสิ้นสุดการแก้ปัญหา โดยผู้วิจัยใช้กล้องบันทึกภาพนิ่งสำหรับบันทึกภาพในเหตุการณ์ที่มีพฤติกรรมที่น่าสนใจของนักเรียนในขณะที่นักเรียนมีการแก้ปัญหา

1.2.3 เทปบันทึกเสียง ใช้บันทึกเสียงของนักเรียนแต่ละกลุ่มในขณะที่นักเรียนพูดคุยกันในช่วงการแก้ปัญหาปลายเปิด

2. เครื่องมือที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

วิเคราะห์การเชื่อมโยงการคิดทางพีชคณิตและการวิเคราะห์ทางเรขาคณิตของนักเรียนซึ่ง วิเคราะห์การคิดทางพีชคณิตตามกรอบของ Pilgrim and Bloemker [16] วิเคราะห์การคิดทางเรขาคณิตตามกรอบของ Duval [5] และวิเคราะห์การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ตามกรอบของ Businskas [3] โดยข้อมูลที่ใช้ในการวิเคราะห์คือ โพรโทคอลจากการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนด้วยวิธีการแบบเปิดซึ่งได้จากการถอดเทปบันทึกชั้นเรียน งานเขียนจากการทำกิจกรรมของนักเรียนและแบบบันทึกภาคสนาม

การเก็บรวบรวมข้อมูลการวิจัย

ผู้วิจัยเก็บรวบรวมข้อมูลโดยจัดการเรียนการสอน โดยใช้วิธีการแบบเปิด ซึ่งผู้วิจัยและผู้ช่วยวิจัยมีการขั้นตอนการดำเนินการ ดังต่อไปนี้

1. การดำเนินการก่อนเก็บรวบรวมข้อมูล

1.1 การร่วมกันสร้างแผนการจัดการเรียนรู้ที่ใช้วิธีการแบบเปิด โดยกระบวนการของการศึกษาชั้นเรียน (Lesson Study) ซึ่งมี 3 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 การสร้างแผนการจัดการเรียนรู้ร่วมกัน (Plan) ระหว่างผู้วิจัยและผู้ร่วม การวางแผนการจัดการเรียนรู้ที่ใช้ 4 ขั้นตอนของวิธีการแบบเปิด สร้างกิจกรรมที่ใช้สถานการณ์ปัญหาปลายเปิด คาดการณ์แนวคิดของนักเรียน และร่วมกันสรุปสาระสำคัญของแผนการเรียนรู้ วางลำดับขั้นการสอนให้สอดคล้องกับเวลาในการทำกิจกรรม

ขั้นที่ 2 การสอนในชั้นเรียนและการสังเกตการสอนร่วมกันของทีมการศึกษาชั้นเรียน (Do) เป็นการนำแผนการจัดการเรียนรู้ไปใช้จริงในชั้นเรียน โดยผู้วิจัยเป็นผู้สอน ผู้สังเกตชั้นเรียน ประกอบด้วย ครูผู้สอนรายวิชาคณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 2 คน นักศึกษาฝึกปฏิบัติการสอนในสถานศึกษา ระดับบัณฑิตศึกษา สาขาวิชาการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี วิชาเอกการสอนคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น เป้าหมายของการสังเกต คือ การสังเกตกระบวนการคิดของนักเรียน อารมณ์ สีหน้า ท่าทางที่แสดงออก การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ไม่ใช่การพิจารณาความสามารถในการสอนของครู

ขั้นที่ 3 การสะท้อนผลหรือการอภิปรายร่วมกันของทีมการศึกษาชั้นเรียน (See) เป็นการสะท้อนผลร่วมกัน ผู้สะท้อนผล คือ ผู้ที่ร่วมวางแผนการจัดการเรียนรู้และผู้สังเกตชั้นเรียนจะสะท้อนผลบทเรียนจากผลที่ได้จากการสังเกตชั้นเรียนเพื่อนำไปสู่การปรับปรุงแผนการจัดการเรียนรู้แล้วนำประเด็นจากการสะท้อนผลไปใช้ในชั้นเรียนใหม่อีกครั้ง ประเด็นที่สะท้อนเป็นประเด็นเดียวกันกับประเด็นที่ร่วมกันวางแผนการจัดการเรียนรู้และสังเกตชั้นเรียน

2 การดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูล

งานวิจัยนี้เก็บรวบรวมข้อมูลโดยการวิเคราะห์การแก้ปัญหาของนักเรียนเรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยใช้วิธีการสอนแบบวิธีการแบบเปิด ซึ่งมีผู้วิจัยเป็นผู้สอน และผู้ช่วยวิจัย 3 คนเก็บข้อมูลตามบทบาทของตัวเอง ดังนี้

1. ผู้วิจัย เป็นครูผู้สอน เป็นคนนำเสนอสถานการณ์ปัญหาปลายเปิดให้นักเรียน จากนั้นช่วงที่นักเรียนทำกิจกรรมผู้วิจัยก็สังเกตพฤติกรรมโดยไม่เข้าไปแทรกแซง เพื่อเก็บรายละเอียดในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมแล้วบันทึกพฤติกรรมการแก้ปัญหาปลายเปิดของนักเรียนจนถึงที่สุดการแก้ปัญหาปลายเปิด และดำเนินการการนำอภิปรายวิธีการแก้ปัญหาของนักเรียนและร่วมสรุปผลการเรียนกับนักเรียน

2. ผู้ช่วยวิจัยคนที่ 1 บันทึกวีดิทัศน์ในระหว่างที่นักเรียนทำการแก้ปัญหาปลายเปิดตั้งแต่เริ่มต้นแก้ปัญหาจนถึงที่สุดการแก้ปัญหา โดยเป็นการบันทึกเหตุการณ์ในลักษณะภาพขยาย (Zoom) เพื่อให้เห็นงานเขียน (Written Work) ของนักเรียน และทำการบันทึกเสียงในระหว่างที่นักเรียนทำการแก้ปัญหาปลายเปิดตั้งแต่เริ่มต้นแก้ปัญหาจนถึงที่สุดการแก้ปัญหา โดยบันทึกที่กลุ่มเป้าหมาย

3. ผู้ช่วยวิจัยคนที่ 2 บันทึกวีดิทัศน์ในระหว่างที่นักเรียนทำการแก้ปัญหาปลายเปิดตั้งแต่เริ่มต้นแก้ปัญหาจนถึงที่สุดการแก้ปัญหา โดยเป็นการบันทึกเหตุการณ์ในลักษณะภาพระยะใกล้เพื่อให้เห็นภาพรวมของนักเรียน และทำการบันทึกภาคสนามในระหว่างที่นักเรียนทำการแก้ปัญหาปลายเปิดตั้งแต่เริ่มต้นแก้ปัญหาจนถึงช่วงการนำเสนอผลงานของนักเรียนและช่วงการสรุปความรู้ โดยบันทึกพฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกมาในระหว่างการแก้ปัญหา นำเสนอและสรุปความรู้ของนักเรียน

4. ผู้ช่วยวิจัยคนที่ 3 ทำการบันทึกภาคสนามในระหว่างที่นักเรียนทำการแก้ปัญหาปลายเปิดตั้งแต่เริ่มต้นแก้ปัญหาจนถึงช่วงการนำเสนอผลงานของนักเรียนและช่วงการสรุปความรู้ โดยบันทึกพฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกมาในระหว่างการแก้ปัญหา นำเสนอและสรุปความรู้ของนักเรียน

การวิเคราะห์ข้อมูลการวิจัย

ในวิจัยเรื่อง การเชื่อมโยงการคิดทางพีชคณิตกับการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในชั้นเรียนที่ใช้วิธีการแบบเปิด ครั้งนี้เป็นการศึกษาวิจัยที่ใช้ระเบียบวิธีการวิจัยเชิงคุณภาพ โดยวิเคราะห์จากโพโทคอลของนักเรียน พร้อมด้วยวิเคราะห์วิธีทัศน์ขั้นเรียน โดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหาของนักเรียน ข้อมูลจากการบันทึกภาคสนามของผู้วิจัยและผู้ร่วมวิจัย และข้อมูลจากผลงานของนักเรียนกลุ่มเป้าหมายที่เขียนอธิบายวิธีการแก้ปัญหาของกลุ่ม รวมทั้งเหตุผลต่างๆที่ใช้เป็นแนวคิดในการแก้ปัญหา เช่น กระดาษบรูฟ กระดาษทด ใบงานต่างๆ ในการใช้ทำกิจกรรมการแก้ปัญหาปลายเปิด เพื่อนำมาวิเคราะห์การคิดทางพีชคณิตตามกรอบของ Pilgrim and Bloemker [16] ซึ่งมี 3 แก่นมุมดังนี้ 1. การใช้สัญลักษณ์ (Symbolization) 2. การใช้รูปแบบ (Patterns) 3. การใช้การแสดงผลที่หลากหลาย (Multiple Representations) วิเคราะห์การคิดทางเรขาคณิตของตามแนวคิดของ Duval [5] มีสามแก่นมุมดังนี้ 1. การนึกภาพ (Visualization) 2. การสร้าง (Construction) 3. การให้เหตุผล (Reasoning) และกรอบการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ของ Businskas [3] ซึ่งมี 7 ประเภท ดังนี้ 1. การแสดงผลสำรอง (Alternate representation) 2. การแสดงผลแทนการเทียบเท่า (Equivalent representation) 3. คุณสมบัติทั่วไป (Common features) 4. การรวมเข้าไว้ด้วยกัน (Inclusion) 5. รูปแบบทั่วไป (Generalization) 6. ความหมายโดยนัย (Implication) 7. กระบวนการ (Procedure)

ผลการวิจัย

การวิเคราะห์การคิดทางพีชคณิตและการคิดทางเรขาคณิต

การวิเคราะห์การคิดทางพีชคณิตและการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนจะเรียนตามลำดับของ 4 ขั้นตอนของวิธีการแบบเปิด วิเคราะห์การคิดทางพีชคณิตตามกรอบของ Pilgrim and Bloemker [16] ซึ่งมี 3 แก่นมุมดังนี้ 1. การใช้สัญลักษณ์ (Symbolization) 2. การใช้รูปแบบ (Patterns) 3. การใช้การแสดงผลที่หลากหลาย (Multiple Representations) วิเคราะห์การคิดทางเรขาคณิตของตามแนวคิดของ Duval [5] มีสามแก่นมุมดังนี้ 1. การนึกภาพ (Visualization) 2. การสร้าง (Construction) 3. การให้เหตุผล (Reasoning) การวิจัยครั้งนี้ใช้นิยามศัพท์คำว่า "Item" หมายถึง พฤติกรรมที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหของนักเรียนในระหว่างการจัดการเรียนการสอนตามลำดับเวลาที่เกิดขึ้นได้แก่ การพูดหรือบทสนทนา โดยมีรายละเอียดการวิเคราะห์ ดังนี้

ตารางการสำรวจการคิดทางพีชคณิตและการคิดทางเรขาคณิตในแต่ละขั้นตอนของวิธีการแบบเปิด

แผนการจัดการเรียนรู้ที่	กลุ่มเป้าหมาย	4 ขั้นตอนของวิธีการแบบเปิด	การคิดทางพีชคณิต			การคิดทางเรขาคณิต		
			S	P	M	V	C	R
1	กลุ่มที่ 1	1	-	-	+	+	-	-
		2	+	+	-	+	+	+
		3	-	-	-	-	-	+
		4	-	-	-	-	-	+
	กลุ่มที่ 2	1	-	-	-	-	-	-

		2	+	+	+	+	+	+
		3	-	-	-	-	-	+
		4	-	-	-	-	-	-
		1	-	-	-	-	-	-
	กลุ่มที่ 3	2	+	+	+	+	+	-
		3	-	-	-	-	-	+
		4	-	+	-	-	-	-
2	กลุ่มที่ 1	1	-	-	-	-	-	-
		2	+	+	+	-	+	+
		3	-	-	-	-	-	+
		4	-	+	-	-	-	-
	กลุ่มที่ 2	1	-	-	-	-	-	-
		2	+	+	+	+	+	+
		3	-	-	-	-	-	+
		4	-	-	-	-	-	-
	กลุ่มที่ 3	1	-	-	-	+	-	-
		2	+	+	+	+	+	+
		3	-	-	-	-	-	-
		4	-	-	-	-	-	+
3	กลุ่มที่ 1	1	-	-	+	+	-	-
		2	+	+	+	-	+	+
		3	-	-	-	-	-	+
		4	-	+	-	-	-	-
	กลุ่มที่ 2	1	-	-	+	-	-	-
		2	+	+	+	+	+	+
		3	-	-	-	-	-	+
		4	-	-	-	-	-	+
	กลุ่มที่ 3	1	-	-	-	+	-	-
		2	+	+	+	+	+	+

		3	-	-	-	-	-	-
		4	-	-	-	-	-	+
4	กลุ่มที่ 1	1	-	-	-	-	-	-
		2	+	+	+	-	+	+
		3	-	-	-	-	-	+
		4	-	+	-	-	-	+
	กลุ่มที่ 2	1	-	-	+	-	-	-
		2	+	+	+	+	+	+
		3	-	-	-	-	-	+
		4	-	+	-	-	-	-
	กลุ่มที่ 3	1	-	-	-	+	-	-
		2	+	+	+	-	+	+
		3	-	-	-	-	+	-
		4	-	-	-	-	-	+
5	กลุ่มที่ 1	1	-	-	-	-	-	-
		2	+	+	+	+	+	+
		3	-	-	-	-	-	+
		4	-	-	-	-	-	-
	กลุ่มที่ 2	1	-	-	+	-	-	-
		2	+	+	-	+	+	+
		3	-	-	-	-	-	+
		4	-	-	-	-	-	+
	กลุ่มที่ 3	1	-	-	+	+	-	-
		2	+	+	+	+	+	+
		3	-	-	-	-	-	-
		4	-	-	-	-	-	+

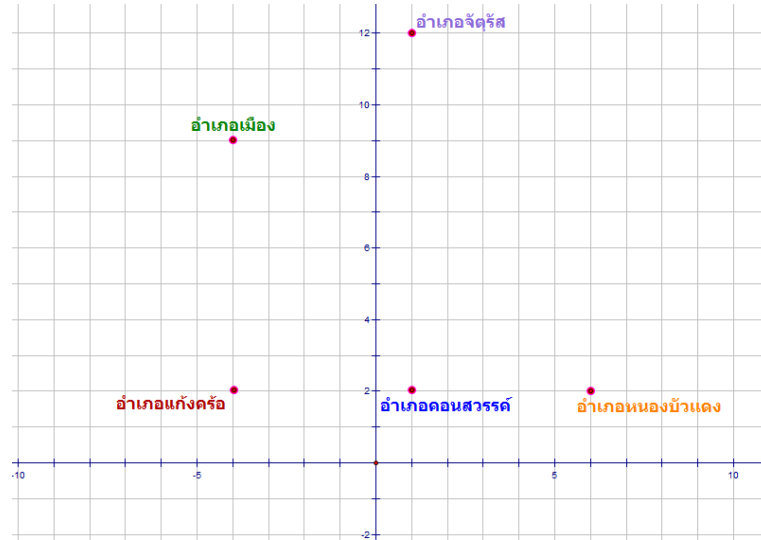
* S = Symbolization, P = Patterns, M = Multiple representations, V = Visualization, C = Construction, R = Reasoning

รูปที่ 1 ตารางการวิเคราะห์ข้อมูลการคิดทางพีชคณิตกับการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มที่ 1 ตาม 4 ขั้นตอนของวิธีการแบบเปิด

การวิเคราะห์แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ทางไหนใกล้กว่ากัน

สถานการณ์ปัญหา

ถ้านักเรียนจะเดินทางไปทุกอำเภอ โดยเริ่มที่อำเภอเมือง นักเรียนจะมีวิธีที่จะเดินทางไปยังทุกเมือง โดยที่มีระยะที่สั้นที่สุด และมีระยะสั้นที่สุดเท่าไร



มาตราส่วน 1 หน่วย ต่อ 1 กิโลเมตร

คำสั่ง: ให้นักเรียนแสดงวิธีการหาเส้นทางที่สั้นที่สุดที่จะเดินทางไปยังทุกเมือง โดยเริ่มจากอำเภอเมือง

การวิเคราะห์การสำรวจการคิดทางพีชคณิต

จะพิจารณาในขั้นที่ 2 การเรียนรู้ด้วยตัวเองของนักเรียน (Students' Self Learning)

1. การใช้สัญลักษณ์ (Symbolization)

Item 29	เฟรม	ใช่ๆ ตรงนี้น่าจะเป็น (1,2)
Item 30	ใหม่	หรือ
Item 31	โพสต์	ถูกแล้ว เป็น 1 เป็น 2
Item 32	ใหม่	ตรงนี้ (4,2) ใช่ไหม (ชี้ที่ อำเภอแก้งคร้อ)
Item 33	เฟรม	ไม่ใช่ๆ ตรงนี้ (-4,2)
Item 34	โพสต์	โอเค เข้าใจแล้วลงไปห้ครบทุกจุด อำเภอเมือง (-4,9)
Item 35	ใหม่	จตุรัส (1,12) แล้วก็ หนองบัวแดง (6,3) แล้วเอาไงต่อทีนี้

จาก Item 29 – Item 35 จะเห็นว่าเป็นการพูดคุยกันของนักเรียนในการลงพิกัดจุดบนระบบพิกัดฉาก จะเห็นว่าใน Item 30 โพสต์ได้พูดว่า ถูกแล้ว x เป็น 1 y เป็น 2 ซึ่งนี่เป็นการใช้ตัวแปรในการบอกพิกัดของจุดของอำเภอ จากตรงนี้จะเห็นว่ามีการใช้ตัวแปร x , y เป็นที่แรกในการแก้ปัญหา ซึ่งปกติตัวแปร x , y ก็ถูกใช้โดยทั่วไปในการบอกพิกัดอยู่แล้ว ในเรื่องการหาระยะห่างระหว่างจุดสองจุดจะนิยมใช้ x_1 , x_2 , y_1 , y_2 ในสูตรที่คำนวณอยู่แล้ว

ดังนั้นการใช้ตัวแปร x, y จึงเป็นการใช้ตัวแปรที่เป็นที่นิยมใช้ในทางคณิตศาสตร์ จากตรงนี้จะเห็นว่านักเรียนมีการคิดทางพีชคณิตในแง่ของการใช้สัญลักษณ์

การวิเคราะห์การสำรวจการคิดทางเรขาคณิต

1. การนึ่งภาพ (Visualization)

Item 36	เฟรม	นั่นดิ เราจะเริ่มเดินจากทางไหนดี
Item 37	พอส	ระยะทางไหนใกล้กว่ากัน เราว่าแบบนี้ใกล้กว่า (พอสลากเส้น จาก อำเภอเมือง ไป แก้งคร้อ ไป คอนสวรรค์ ไป หนองบัวแดง ไป จตุรัส)..... ทางที่ 1
Item 38	เฟรม	เค้าก็ว่าทางนี้เหมือนกัน ลงข้างล่างปั๊บ แล้วก็ตรงมา แล้วก็ขึ้นมาอย่างนี้เลย ครบพอดี
Item 39	พอส	หรือว่าจะอย่างนี้ (พอสลากเส้น จาก อำเภอเมือง ไป จตุรัส ไป หนองบัวแดง ไป คอนสวรรค์ ไป แก้งคร้อ).... ทางที่ 2

จาก Item 36 – Item 39 แสดงถึงการพูดคุยกันของนักเรียนเกี่ยวกับการหาเส้นทางที่จะเชื่อมต่อแต่ละอำเภอให้สั้นที่สุด ซึ่งในคำพูดของเฟรม Item 38 ที่บอกว่า เค้าก็ว่าทางนี้เหมือนกัน ลงข้างล่างปั๊บ แล้วก็ตรงมา แล้วก็ขึ้นมาอย่างนี้เลย ครบพอดี ซึ่งเป็นการอธิบายภาพเส้นทางที่ตนเองคิดไว้ในใจแต่ไม่ได้วาดลงไป ในกระดาษ แต่การอธิบายของเฟรมไม่ได้บอกว่าทางที่ตนเองจะไปนั้นผ่านอำเภอไหนบ้าง แต่เฟรมอธิบายว่า ขึ้น ลง ตรงไป ซึ่งจะบอกตรงนี้ได้ ต้องผ่านการลงจุดบนกราฟมาแล้วแล้วบอกจากที่มองเห็นบนกราฟ จากตรงนี้จะเห็นได้ว่านักเรียนมีการคิดทางเรขาคณิตในแง่ของการนึ่งภาพ

การวิเคราะห์การเชื่อมโยงการคิดทางพีชคณิตกับการคิดทางเรขาคณิต

จากการวิเคราะห์การคิดทางพีชคณิตและการคิดทางเรขาคณิตเพื่อแยกแยะแต่ละขั้นตอนนักเรียนมีการคิดแบบไหนปรากฏขึ้นมาบ้าง แล้วจากนั้นผู้วิจัยได้นำแต่ละการคิดที่ได้วิเคราะห์มาทำการจัดเรียงลำดับตามเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นว่าการคิดไหนเกิดการคิดไหนเกิดทีหลังและได้ทำการวิเคราะห์หว่าในแต่ละการคิดที่เกิดขึ้นนั้นได้มีการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ดังที่เรจำแนกตามกรอบของ Businskas [3] ซึ่งจะเห็นได้จากรูปที่ 1 เป็นรูปการวิเคราะห์การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ตามกรอบของ Businskas [3] โดยใช้ข้อมูลจากการวิเคราะห์การคิดทางพีชคณิตและการคิดทางเรขาคณิตมาทำการวิเคราะห์ จาก รูปที่ 1 ผู้วิจัยได้กำหนดสัญลักษณ์ขึ้นมาเพื่อง่ายต่อการเข้าใจ ซึ่งมีคำอธิบายดังนี้

1. ตัวอักษรภาษาอังกฤษที่เป็นตัวพิมพ์ใหญ่ ใช้แทนแง่มุมต่างๆของการคิดทางพีชคณิตและการคิดทางเรขาคณิต นั่นคือ “S” สัญลักษณ์ (Symbolization)

“P” รูปแบบ (Patterns)

“M” การแสดงแทนที่หลากหลาย (Multiple representations)

“V” การนึ่งภาพ (Visualization)

“C” การสร้าง (Construction)

“R” การให้เหตุผล (Reasoning)

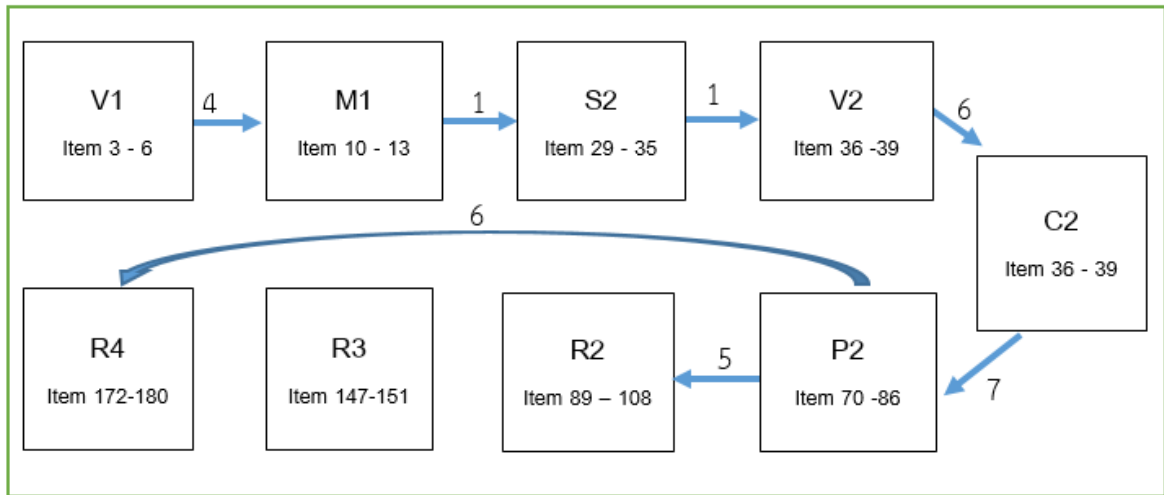
2. ตัวเลขที่ตามหลังตัวอักษรภาษาอังกฤษ ใช้แทนแต่ละขั้นตอนของวิธีการแบบเปิด เช่น S1 หมายถึง การคิดทางพีชคณิตในแง่ของการใช้สัญลักษณ์เกิดขึ้นในขั้นที่ 1 ของวิธีการแบบเปิด

3. ตัวเลขที่แสดงการกำกับลูกศร ใช้แทนประเภทของการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ซึ่งมีด้วยกัน 7 ประเภท ดังนี้

1 แทน การแสดงแทนสำรอง (Alternate representation)

- 2 แทน การแสดงแทนการเทียบเท่า (Equivalent representation)
- 3 แทน คุณสมบัติทั่วไป (Common features)
- 4 แทน การรวมเข้าไว้ด้วยกัน (Inclusion)
- 5 แทน รูปแบบทั่วไป (Generalization)
- 6 แทน ความหมายโดยนัย (Implication)
- 7 แทน กระบวนการ (Procedure)

4. ลูกร ใช้แสดงทิศทางการเชื่อมโยงจากแ่งมุมไหน ไปยังแ่งมุมไหน



รูปที่ 2 แผนผังแสดงการวิเคราะห์การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่ 1 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 จากแผนผังจะวิเคราะห์การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ระหว่างสองแ่งมุมที่เชื่อมโยงกันโดยจะแบ่งการวิเคราะห์ออกเป็นช่วงในการวิเคราะห์ซึ่งแบ่งตามลูกรที่ชี้จากแ่งมุมหนึ่งไปยังอีกแ่งมุมหนึ่ง ซึ่งมีตัวอย่าง ดังนี้

ช่วงที่ 1 V1 -> M1 ในช่วงนี้เป็นการเชื่อมโยงจากแ่งมุมการนิกภาพซึ่งเป็นการคิดทางเรขาคณิตไปยังแ่งมุมการแสดงแทนที่หลากหลายซึ่งเป็นการคิดทางพีชคณิต ใน Item 3 - 6 เป็นแ่งมุมของการนิกภาพ ซึ่งครูได้ถามนักเรียนว่าจากสถานการณ์ที่ครูให้มานักเรียนเห็นอะไร ซึ่งนักเรียนตอบว่า กราฟ แต่ในสถานการณ์ปัญหาที่ครูให้นั้นไม่มีกราฟ มีเพียงจุดเท่านั้นเอง และใน Item 10 -13 เป็นแ่งมุมของการแสดงแทนที่หลากหลาย โดยครูถามต่อว่ากราฟที่เห็นเรียนว่าอะไร นักเรียนก็ตอบว่า ระบบพิกัดฉาก ซึ่งเป็นการแสดงแทนโดยใช้คำซึ่งมีความหมายทางคณิตศาสตร์ จากคำตอบของนักเรียนที่ว่า กราฟและระบบพิกัดฉากนั้นจะเห็นว่าอยู่ในเนื้อหาเดียวกัน เพราะกราฟสามารถวาดได้บนระบบพิกัดฉากโดยการลงจุดบนระบบพิกัดฉากแล้วลากเส้นจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง และระบบพิกัดฉากง่ายต่อการสร้างกราฟเพราะสามารถบอกพิกัดบนกราฟได้เลย จากตรงนี้แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์แบบการรวมเข้าไว้ด้วยกัน

ช่วงที่ 2 M1 -> S2 ในช่วงนี้เป็นการเชื่อมโยงจากแ่งมุมการแสดงแทนที่หลากหลายซึ่งเป็นการคิดทางพีชคณิตไปยังแ่งมุมการใช้สัญลักษณ์ซึ่งเป็นการคิดทางพีชคณิตเหมือนกันใน Item 10 - 13 ในแ่งมุมของการแสดงแทนที่หลากหลายเป็นการแสดงแทนโดยใช้คำพูด คือคำว่า ระบบพิกัดฉาก ซึ่งเป็นคำที่มีความหมายทางคณิตศาสตร์ใช้บอกพิกัดของจุดด้วยระยะห่างจากแกนที่ตัดกันเป็นมุมฉากโดยปกติจะวางแกนทั้งสองในแนวระดับ และแนวตั้ง

อักษรที่ใช้เป็นชื่อแกน นิยมใช้ X และ Y และใน Item 29 – 35 เป็นแง่มุมของการใช้สัญลักษณ์ นักเรียนได้มีการใช้สัญลักษณ์ในการแทนจุดแต่ละอำเภอตามที่โจทย์กำหนดให้ จะเห็นว่านักเรียนใช้สัญลักษณ์ (x, y) ในการแทนพิกัดจุดแต่ละจุด จะเห็นได้ว่านักเรียนมีการใช้ คำ และการกำหนดสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการแก้ปัญหา จากตรงนี้แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์แบบการแสดงแทนสำรอง

อภิปรายและสรุปผลการวิจัย

สรุปผลการวิจัย

จากการวิเคราะห์ข้อมูลการเชื่อมโยงการคิดทางพีชคณิตและการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนในชั้นเรียนที่ใช้วิธีการแบบเปิด พบการเชื่อมโยงการคิดทางพีชคณิตและการคิดทางเรขาคณิตตามกรอบของ Businiskas [3] สรุปได้ดังต่อไปนี้

1. การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์แบบการแสดงแทนสำรอง เป็นการเชื่อมโยงโดยใช้แนวคิดหนึ่งแสดงแทนอีกแนวคิดหนึ่ง ในการวิจัยนี้พบว่าการแสดงแทนสำรองที่นักเรียนใช้มีการใช้สัญลักษณ์ (x, y) แสดงแทนพิกัดจุดต่างๆในระบบพิกัดฉาก การใช้สมการพาราโบลาแทนเส้นโค้งของจานดาวเทียม ซึ่งสามารถทำให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้โดยการหาสัญลักษณ์ต่างๆมาใช้ในการแสดงแทนสิ่งที่นักเรียนคิดไม่ออกหรือใช้ในการแสดงแทนสิ่งที่นักเรียนคิดเพื่ออำนวยความสะดวกของนักเรียน ส่งผลให้นักเรียนสามารถเลือกหรือหาสิ่งที่แสดงแนวคิดของนักเรียนออกมาให้เพื่อนๆได้เรียนรู้ร่วมกันได้
2. การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์แบบการแสดงแทนการเทียบเท่า เป็นการเชื่อมโยงโดยการแสดงของสองแนวคิดที่มีคำตอบเหมือนกันแต่มีวิธีการคิดหรือวิธีการแก้ปัญหาไม่เหมือนกัน จากการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์โดยการเทียบเท่าทำให้นักเรียนสามารถมีวิธีการคิดในการแก้ปัญหาได้หลากหลายวิธีในการแก้ปัญหานั้นๆ ส่งผลให้นักเรียนสามารถเลือกใช้วิธีการแก้ปัญหาที่ง่ายและเร็วที่สุด
3. การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์แบบการใช้คุณสมบัติทั่วไป เป็นการเชื่อมโยงสองแนวคิดที่มีการใช้คุณสมบัติบางอย่างร่วมกัน ทำให้พบว่านักเรียนสามารถหาลักษณะหรือคุณสมบัติสองแนวคิดมีร่วมกัน ส่งผลให้นักเรียนสามารถบอกความเหมือนหรือความแตกต่างของสองแนวคิด
4. การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์แบบการรวมเข้าไว้ด้วยกัน เป็นการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ที่รวมแนวคิดหนึ่งที่เป็นองค์ประกอบของแนวคิดหนึ่งได้ด้วยกัน ส่งผลให้นักเรียนสามารถรวมแนวคิดที่มีลักษณะเดียวกันหรือใกล้เคียงกันไว้ด้วยกันเพื่อจะได้ไม่มีแนวคิดที่ซ้ำกันเกิดขึ้นในชั้นเรียน
5. การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์แบบทำเป็นรูปแบบทั่วไป เป็นการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ที่แนวคิดหนึ่งส่งผลให้สามารถสรุปแนวคิดหนึ่งให้เป็นรูปแบบทั่วไปได้ ส่งผลให้นักเรียนสามารถสรุปความรู้ที่เกิดขึ้นภายในห้องเรียนไปสู่รูปแบบทั่วไปในทางคณิตศาสตร์ได้ และนักเรียนสามารถเลือกรูปแบบทั่วไปที่เหมาะสมกับการแก้ปัญหาในแต่ละข้ออีกด้วย
6. การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์แบบการให้ความหมายโดยนัย เป็นการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ที่แนวคิดหนึ่งใช้สนับสนุนอีกแนวคิดหนึ่งหรือแนวคิดหนึ่งเกิดขึ้นทำให้เกิดอีกแนวคิดหนึ่งขึ้นมา ส่งผลให้นักเรียนสามารถนำแนวคิดหนึ่งมาใช้แก้ปัญหาคือต่อมาได้

7. การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์แบบการกระบวนกร เป็นการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ที่เป็นขั้นเป็นตอน และในวิธีการหรือกระบวนการแก้ปัญหาหนึ่งซึ่งแนวคิดหนึ่งจะใช้อธิบายอีกแนวคิดหนึ่งได้อย่างชัดเจน ส่งผลให้นักเรียนมีวิธีการอธิบายเป็นขั้นเป็นตอนและเป็นระบบ

อภิปราย

ในการจัดการเรียนการสอนเรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์ซึ่งเป็นการเชื่อมโยงความรู้ระหว่างพีชคณิตและเรขาคณิต เขาด้วยกัน ซึ่งการแก้ปัญหาทางพีชคณิตบางปัญหาอาจนำความรู้ทางเรขาคณิตมาช่วยปัญหา หรือการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตบางปัญหาอาจนำความรู้ทางพีชคณิตมาช่วยในการแก้ปัญหา Inprasitha (2011) กล่าวว่าในการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการแบบเปิดซึ่งเน้นให้นักเรียนแก้ปัญหาด้วยตัวเอง ทำให้นักเรียนสามารถดึงศักยภาพของตัวเองในด้านการคิดการคิดทางพีชคณิตและทางเรขาคณิตออกมาใช้ได้เต็มที่ และตามที่ Kennedy and Tipps (1994) กล่าวว่าผู้เรียนจะต้องรู้จักสร้างการเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่เป็นรูปธรรมได้แก่รูปภาพ สัญลักษณ์และมโนคติ กับกระบวนการรวมเนื้อหาและวิธีการต่างๆ ทางคณิตศาสตร์เข้าด้วยกัน และจะต้องรู้จักสร้างการเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับชีวิตจริง นักเรียนสามารถคิดหาวิธีการแก้ปัญหาด้วยตัวเองและสามารถเชื่อมโยงความรู้ระหว่างการคิดทางเรขาคณิตและการคิดทางพีชคณิตได้ จากการวิเคราะห์ข้อมูลพบว่านักเรียนสามารถเชื่อมโยงการคิดทางพีชคณิตและการคิดทางเรขาคณิตทั้ง 7 ประเภท ได้แก่ 1. การแสดงแทนสำรอง (Alternate representation) 2. การแสดงแทนการเทียบเท่า (Equivalent representation) 3. คุณสมบัติทั่วไป (Common features) 4. การรวมเข้าไว้ด้วยกัน (Inclusion) 5. รูปแบบทั่วไป (Generalization) 6. ความหมายโดยนัย (Implication) 7. กระบวนการ (Procedure) เพื่อแก้ปัญหาเรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์ ซึ่งทำให้นักเรียนเห็นการแก้ปัญหาด้วยวิธีการต่างๆ ที่หลากหลายทำให้นักเรียนสามารถที่จะเลือกวิธีการแก้ปัญหาที่ง่ายและเหมาะสมต่อสถานการณ์ปัญหานั้น

กิตติกรรมประกาศ

ผลงานนี้ได้รับการสนับสนุนการวิจัย (บางส่วน) จากศูนย์ความเป็นเลิศด้านคณิตศาสตร์ สำนักงานคณะกรรมการอุดมศึกษา ประเทศไทยและศูนย์วิจัยคณิตศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

เอกสารอ้างอิง

กระทรวงศึกษาธิการ. 2551. หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.

Atiyah, M. (2001). Mathematics in the 20th Century. American Mathematical Monthly, 654-666.

Businskas, A. M. (2008). CONVERSATIONS ABOUT CONNECTIONS. Ph.D. Dissertation, Department of Education, University of Simon Fraser University.

Dindyal, J. (2005). An overview of the Singapore mathematics curriculum framework and the NCTM Standards. Topic Study Group, 3.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. NEW ICMI STUDIES SERIES, 5, 37-51.

Freudenthal, M., (1971). Neogene vertebrates from the Gargano Peninsula, Italy. — Scripta Geol.,3: 110.

Hiebert, J. & Carpenter, Th. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In: D. W. Grouws (Ed.), Handbook of research in teaching and learning of mathematics (pp. 65-97). New York: Macmillan.

Hilfgard E R & Hffgmd J R. (1984). Hypnosis in the relief of pain. Los Altos, CA: William Kaufmann, P. 302.



- Hodgson, T.R. (1995). Connections as problem-solving tool. In P.A. House (Ed.).Connecting mathematics across the curriculum, 1995 Yearbook. (pp. 13-21). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Inprasitha, M. (2011). One Feature of Adaptive Lesson Study in Thailand Designing Learning Unit. Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia, 34(1), 47-66.
- Jaijan, W., & Loipha, S. (2014). Making Mathematical Connections with Transformations Using Open Approach. HRD JOURNAL, 3(1), 91-100.
- Kennedy & Tipps. (1994). Guiding Children ' s Learning of Mathematics. Belmont, CA: Wadsworth Publishing.
- Lee, L., & Wheeler, D. (1989). The arithmetic connection. Educational Studies in Mathematics, 20(1), 41-54.
- Mousley, J. (2004). An aspect of mathematical understanding: The notion of "connected knowing". In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), Proceedings of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 377-384). Bergen, Norway: Bergen University College.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author.
- Nichols, B. W. (1986). The effect of different sequences of geometry and algebra II on mathematics education. Unpublished doctoral dissertation, University of Missouri, Kansas City.
- Pilgrim, M. E., & Bloemker, J. (2016) . Accepted and to be published in Spring 2016 (April 1, 2016) issue of Colorado Mathematics Teacher CONNECTING ALGEBRA TO GEOMETRY: A TRANSITION SUMMER CAMP FOR AT-RISK STUDENTS.