ผลเฉลยที่เป็นจำนวนจริงของสมการ

$$\alpha\left[(x+a)^4+(x+b)^4\right]=\beta\left[(y+c)^4+(y+d)^4\right];\ a,b,c,d\in R\ ,\alpha,\beta\in R^+$$

Real Solutions of Equation

$$\alpha\left[(x+a)^4+(x+b)^4\right]=\beta\left[(y+c)^4+(y+d)^4\right];\ a,b,c,d\in R\ ,\alpha,\beta\in R^+$$

เอกอนงค์ เตจ๊ะสาร (Akanong Tajasan)* ดร.ธนะศักดิ์ หมวกทองหลาง (Thanasak Mouktonglang)**

บทคัดย่อ

บทความนี้เป็นการนำเสนอเกี่ยวกับการหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $\alpha\left[(x+a)^4+(x+b)^4\right]=\beta\left[(y+c)^4+(y+d)^4\right];\ a,b,c,d\in R\ ,\alpha,\beta\in R^+$ โดยการดัดแปรขั้นตอนวิธีการหาคำตอบของสมการกำลังสี่ที่อยู่ในรูป $(x+a)^4+(x+b)^4=c$ เมื่อ a,b,c เป็นค่าคงตัว และ วิธีการหาคำตอบของสมการไดโอแฟนไทน์ $A^3+B^3+C^3=D^3$ ของ เจมส์ ดี ฮาร์เปอร์ ทำให้ได้คำตอบทั่วไปของสมการในรูปแบบหนึ่ง และท้ายที่สุดได้ตัวอย่างและแบบฝึกหัดเกี่ยวกับ การหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $\alpha\left[(x+a)^4+(x+b)^4\right]=\beta\left[(y+c)^4+(y+d)^4\right];\ a,b,c,d\in R\ ,\alpha,\beta\in R^+$ เพื่อนำไปใช้ในการจัดการเรียนการสอนต่อไป

ABSTRACT

In this article, we present a solution which are real numbers of an equation $\alpha\left[(x+a)^4+(x+b)^4\right]=\beta\left[(y+c)^4+(y+d)^4\right];\ a,b,c,d\in R\ ,\alpha,\beta\in R^+$ using quartic solution method of the equation $(x+a)^4+(x+b)^4=c$ for any constants a, b, c and technique of finding a solution of a diophantine equation $A^3+B^3+C^3=D^3$ proposed by James D. Harper. We obtain a type of a general solution. We obtain examples and exercises for finding a solution of an equation $\alpha\left[(x+a)^4+(x+b)^4\right]=\beta\left[(y+c)^4+(y+d)^4\right];$
$a,b,c,d\in R\ ,\alpha,\beta\in R^+$ to be used in a classroom.

คำสำคัญ: ผลเฉลยที่เป็นจำนวนจริง สมการกำลังสี่

Keywords: Real solutions, Quartic solution

*นักศึกษา หลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

** ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

บทนำ

จากการที่ผู้วิจัยได้รับมอบหมายให้ปฏิบัติหน้าที่ในการจัดการเรียนรู้ให้แก่นักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่6 โรงเรียนปายวิทยาคาร อ.ปาย จ.แม่ฮ่องสอน และทางโรงเรียนได้มอบหมายให้ทบทวนความรู้ให้กับนักเรียนเพื่อเตรียมตัวเข้าสู่ระดับมหาวิทยาลัย ทำให้ได้ศึกษาความรู้เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่หลากหลาย สิ่งหนึ่งที่พบระหว่างการจัดการเรียนการสอน คือ นักเรียนสนใจในการหาคำตอบของสมการพหุนามกำลังสี่ ที่อยู่ในรูป $(x+a)^4+(x+b)^4=c$ เมื่อ a,b,c เป็นค่าคงตัว ผู้วิจัยจึงได้ค้นคว้าหาความรู้เพิ่มเติม เพื่อใช้ในการอธิบายให้กับนักเรียนนอกจากนี้ผู้วิจัยยังสนใจการหาคำตอบของสมการที่อยู่ในรูป $\alpha\left[(x+a)^4+(x+b)^4\right]=\beta\left[(y+c)^4+(y+d)^4\right];\ a,b,c,d\in R\ ,\alpha,\beta\in R^+$ (1) อีกด้วย

มีนักคณิตศาสตร์หลายท่าน ได้หาคำตอบของสมการกำลังสี่ โดยการเปลี่ยนค่าตัวแปร เพื่อให้การคำนวณง่ายขึ้น เช่น Choudhry (1991) ได้หาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $A^4+B^4=C^4+D^4$ โดยให้ a,b,c และ d เป็นคำตอบที่ไม่เท่ากับศูนย์ของสมการ แล $a^4+b^4=c^4+d^4$ และกำหนดให้

$f(x,y)=(2ax-py)^4+(2bx+qy)^4-(2cx-py)^4-(2dx+qy)^4$ โดยที่ $p=a+b+c+d$ และ

$q=a-b-c-d$ ได้ $f(x,y)=8xy(x-y)[4\{p(c^3-a^3)+q(b^3-d^3)\}x-\{p^3(c-a)+q^3(b-d)\}y]$

เลือก $x=p^3(c-a)+q^3(b-d)$ และ $y=4\{p(c^3-a^3)+q(b^3-d^3)\}$ เมื่อ $f(x,y)=0$ ได้ผลเฉลย คือ

$$A=a\{p^3(c-a)+q^3(b-d)\}-2p\{p(c^3-a^3)+q(b^3-d^3)\}$$
$$B=b\{p^3(c-a)+q^3(b-d)\}+2q\{p(c^3-a^3)+q(b^3-d^3)\}$$
$$C=c\{p^3(c-a)+q^3(b-d)\}-2p\{p(c^3-a^3)+q(b^3-d^3)\}$$
$$D=d\{p^3(c-a)+q^3(b-d)\}+2q\{p(c^3-a^3)+q(b^3-d^3)\}$$

จากนั้นก็แทนค่า $\pm a,\pm b,\pm c,\pm d$ ทำให้ได้คำตอบของสมการ ไดโอแฟนไทน์ $A^4+B^4=C^4+D^4$

ออยเลอร์ (ม.ป.ป. อ้างถึงใน Dickson,1920) ได้หาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $A^4+B^4=C^4+D^4$ โดยการเปลี่ยนค่าตัวแปร กำหนดให้ $A=p+q$, $D=p-q$, $C=r+s$ และ $B=r-s$ จะได้ $pq(p^2+q^2)=rs(r^2+s^2)$ จากนั้นกำหนดให้ $p=ax$, $q=by$, $r=kx$ และ $s=y$ แล้วจะได้ว่า

$\dfrac{y^2}{x^2}=\dfrac{k^3-a^2b}{ab^3-k}$ และถ้าให้ $k=ab,x=1$ แล้ว $y=\pm a$,

$C=\pm A$ และ $B=\pm D$ ถ้า $k=ab(1+z)$ แล้ว $\dfrac{y^2}{x^2}=\dfrac{a^2Q}{(b^2-1-z)^2}$

โดยที่ $Q=(b^2-1)^2+(b^2-1)(3b^2-1)z+3b^2(b^2-2)z^2+b^2(b^2-4)z^3-b^2z^4$ จากนั้นให้ Q เป็นกำลังสองของ $b^2-1+fz+gz^2$ โดยการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้ $f=\dfrac{3b^2-1}{2}$, $g=\dfrac{3b^4-18b^2-1}{8(b^2-1)}$ $z=\dfrac{b^2(b^2-4)-2fg}{b^2+g^2}$ แล้วได้ $x:y=b^2-1-z:a(b^2-1+fz+gz^2)$ ในตัวอย่างออยเลอร์ให้ a=2 และ b =3 ได้ $A=12,231$, $B=2,903$, $C=10,381$ และ $D=10,203$

จะเห็นว่า ชูดรีและออยเลอร์ ได้หาคำตอบของสมการกำลังสี่ โดยการเปลี่ยนค่าตัวแปร ในสมการ ผู้วิจัยจึงสนใจวิธีการนี้เป็นแนวทางในการหาคำตอบของสมการ(1)

ในการหาคำตอบของสมการ (1)โดยวิธีอย่างง่าย คือ การลองแทนค่าตัวแปร x หรือ y ด้วยจำนวนจริงใดๆก่อน จะได้สมการตัวแปรเดียวดีกรีสี่ จากนั้น หาคำตอบของสมการดีกรีสี่ เช่น การหาคำตอบของสมการ

$(x-1)^4+(x+1)^4=(y-2)^4+(y+2)^4$ เมื่อแทนค่า x ด้วย 0 จะได้ $y^4+24y^2+15=0$ นั่นคือ $y\approx\pm0.801i$ หรือ $y\approx\pm0.4833i$ ซึ่งคำตอบที่ได้อาจมีทั้งจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน และคำตอบที่ได้ยังไม่ได้อยู่ในรูปทั่วไป

ในพีชคณิต ฉวีวรรณ (2553) ได้นำเสนอวิธีหาคำตอบของสมการพหุนามดีกรีสี่ ตัวแปรเดียว ที่มีรูปแบบ $(x+a)^4+(x+b)^4=c$ เมื่อ a,b,c ใช้เทคนิคการเปลี่ยนตัวแปร โดยหาค่าคงตัว d ที่ทำให้ $y+d=x+a$ และ $y-d=x+b$ จะได้ $d=\frac{a-b}{2}$ หรือ $y=\frac{1}{2}[(x+a)+(x+b)]$ นั่นคือ y เป็นค่าเฉลี่ยของ $x+a$ และ $x+b$ แล้วทำให้ได้สมการในตัวแปรใหม่ y เป็น $(y+d)^4+(y-d)^4=c$ ซึ่งพหุนามดีกรีสามจะถูกกำจัดทิ้ง สมการจะอยู่ในรูป $2y^4+12d^2y^2+(2d^2-c)=0$ ซึ่งหาคำตอบของสมการได้ง่าย

Harper (2013) ได้แสดงวิธีการหาคำตอบของสมการไดโอแฟนไทน์ $A^3+B^3+C^3=D^3$ โดยสร้างสมการสองตัวแปรและกำจัดพจน์ที่มีกำลังสามออกด้วยสมการ $(3+x)^3+(4+y)^3+(5-x)^3=(6+y)^3$ ได้ $y^2+10y+5^2=4x^2-8x+5^2$ จากนั้นหาคำตอบของสมการโดยใช้วิธีแทนค่าตัวแปรจนได้ค่า $x=\frac{25-r^2}{4r+8}$ และ $y=\frac{2r^2-12r+10}{4r+8}$ ซึ่งอยู่ในรูปทั่วไป

ดังนั้นผู้วิจัยจึงจะนำวิธีข้างต้นมาใช้ในการหาผลเฉลยของคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการ (1) ซึ่งทางผู้จัดทำหวังว่าจะได้รูปแบบคำตอบของสมการรูปแบบหนึ่งเพื่อเป็นประโยชน์ทางการศึกษาต่อไป

ความรู้พื้นฐาน

รามานุจัน รูปแบบกำลังสอง และผลรวมของสามพจน์ที่แต่ละพจน์อยู่รูปกำลังสาม

Harper (2013) ได้ศึกษาเรื่อง รามานุจัน รูปแบบกำลังสอง และผลรวมของสามพจน์ที่แต่ละพจน์อยู่รูปกำลังสาม ไว้ดังนี้

วิธีไดโอเฟนตัส (Diophantus 's medthod for making a quadratic a square)

ให้รูปแบบกำลังสองคือ a^2x^2+bx+c หรือ ax^2+bx+c^2 เมื่อ a,b และ c เป็นจำนวนตรรกยะใดๆ จะสามารถหาจำนวนตรรกยะ x ที่ทำให้

กรณีที่ 1 $a^2x^2+bx+c=(ax+r)^2$

กรณีที่ 2 $ax^2+bx+c^2=(rx+c)^2$

เมื่อ r เป็นจำนวนตรรกยะใดๆ

การหาคำตอบของสมการไดโอแฟนไทน์ที่อยู่ในรูป $A^3+B^3+C^3=D^3$

ให้ $$A^3+B^3+C^3=D^3 \tag{2}$$

เมื่อ A, B,C และ D เป็นจำนวนเต็ม

รามานุจันได้ให้รูปแบบกำลังสองสำหรับสมการ (2) คือ

$$(3u^2+5uv-5v^2)^3+(4u^2-4uv+6v^2)^3+(5u^2-5uv-3v^2)^3=(3u^2+5uv-5v^2)^3$$

แทนค่า u=1 และ v=0 จะได้ว่า

$3^3+4^3+5^3=6^3$ ใช้เป็นจุดเริ่มต้นในการหาคำตอบของสมการไดโอแฟนไทน์ (2)

สร้างสมการสองตัวแปรและกำจัดพจน์ที่มีกำลังสามออกด้วยสมการ

$$(3+x)^3+(4+y)^3+(5-x)^3=(6+y)^3$$

$6y^2 + 60y - 24x^2 + 48x = 0$

หรือ $y^2 + 10y - 4x^2 + 8x = 0$

$y = \pm\sqrt{4x^2 - 8x + 25} - 5$

สนใจคำตอบที่เป็นจำนวนตรรกยะ ให้ $z^2 = 4x^2 - 8x + 25$ เมื่อ z เป็นจำนวนตรรกยะ

จาก วิธีไดโอเฟนตัส จะมีจำนวนตรรกยะ r ที่ทำให้ $z = 2x + r$ ดังนั้น

$4x^2 - 8x + 25 = (2x + r)^2 = 4x^2 + 4rx + r^2$

นั่นคือ $x = \dfrac{25 - r^2}{4r + 8}$

พิจารณารากที่สองที่เป็นบวก จะได้

$\sqrt{4x^2 - 8x + 25} = \dfrac{2r^2 + 8r + 50}{4r + 8}$

จะได้คำตอบหนึ่งสำหรับ y คือ

$y = \sqrt{4x^2 - 8x + 25} - 5 = \dfrac{2r^2 - 12r + 10}{4r + 8}$

แทน $x = \dfrac{25 - r^2}{4r + 8}$ และ $y = \dfrac{2r^2 - 12r + 10}{4r + 8}$ ใน $(3 + x)^3 + (4 + y)^3 + (5 - x)^3 = (6 + y)^3$

ได้ $\left(\dfrac{-r^2 + 12r + 49}{4r + 8}\right)^3 + \left(\dfrac{2r^2 + 4r + 42}{4r + 8}\right)^3 + \left(\dfrac{r^2 + 20r + 15}{4r + 8}\right)^3 = \left(\dfrac{2r^2 + 12r + 58}{4r + 8}\right)^3$

แทนค่า $r = \dfrac{u}{v}$ เมื่อ u,v เป็นจำนวนเต็มและ $v \neq 0$ จะได้

$A = 49v^2 + 12uv - u^2$

$B = 42v^2 + 4uv + 2u^2$

$C = 15v^2 + 20uv + u^2$

$D = 58v^2 + 12uv + 2u^2$

การหาคำตอบของสมการในรูป $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$ เมื่อ a,b,c เป็นค่าคงตัว

ฉวีวรรณ (2553) ได้รวบรวมวิธีการหาคำตอบของสมการที่อยู่ในรูป $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$ เมื่อ a,b,c เป็นค่าคงตัว โดยหาค่าคงตัว d ที่ทำให้ $y + d = x + a$ และ $y - d = x + b$ ซึ่งทำให้ได้ $d = \dfrac{a - b}{2}$ หรือ $y = \frac{1}{2}[(x + a) + (x + b)]$ นั่นคือ y เป็นค่าเฉลี่ยของ x + a และ x + b ทำให้ได้ตัวแปรใหม่ yดังนี้

$(y + d)^4 + (y - d)^4 = c$

ตัวอย่าง จงหารากของสมการ $(x + 1)^4 + (x - 3)^4 = 256$

วิธีทำ เราแปลงสมการให้อยู่ในรูปตัวแปรใหม่ y ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยของ x+1 กับ x-3 นั่นคือ

ให้ $y = \frac{1}{2}[(x + 1) + (x - 3)] = \frac{1}{2}(2x - 2) = x - 1$

ซึ่งทำให้ได้ x=y+1 และเมื่อแทนลงในสมการที่กำหนด เราจะได้สมการที่อยู่ในรูปสมดุลตัวแปร y ดังนี้

$[(y + 1) + 1]^4 + [(y + 1) - 3]^4 = 256$ หรือ $(y + 2)^4 + (y - 2)^4 = 256$ ซึ่งทำการกระจายได้ดังนี้

$$256=[(y+2)^2]^2+[(y-2)^2]^2=(y^2+4y+4)^2+(y^2-4y+4)^2$$
$$=(y^2+4)^2+8y(y^2+4)+16y^2+(y^2+4)^2-8y(y^2+4)+16y^2$$
$$=2[(y^2+4)^2+16y^2]$$

หรือ $128=y^4+8y^2+16+16y^2$

ซึ่งทำให้ได้ $0=y^4+24y^2-112=(y^2+28)(y^2-4)$ และได้ $y^2=4$ หรือ $y^2=-28$

ดังนั้นรากที่เป็นไปได้ของสมการในตัวแปร y คือ $y=\pm 2$ หรือ $y=\pm 2\sqrt{7}i$ และเมื่อตรวจคำตอบแล้วเราจะได้รากของสมการคือ $x=\pm 2+1$ หรือ $y=\pm 2\sqrt{7}i+1$ นั่นคือ $x=3,-1$ หรือ $1\pm 2\sqrt{7}i$

ทฤษฎีบท

ผลเฉลยที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $\alpha\left[(x+a)^4+(x+b)^4\right]=\beta\left[(y+c)^4+(y+d)^4\right];$
$a,b,c,d\in R\ ,\alpha,\beta\in R^{+}$

คือ $\quad x=\left(\pm\sqrt{m}\right)-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\ ,\ y=\pm\left(\sqrt{n}\right)-\left(\dfrac{c+d}{2}\right)$

เมื่อ $\quad m=\dfrac{\alpha\sqrt{\beta}r^2-(6\beta\sqrt{\alpha}q^2+6\alpha\sqrt{\beta}p^2)r+(\beta^{\frac{3}{2}}q^4+8\alpha\sqrt{\beta}p^4+18\beta\sqrt{\alpha}p^2q^2)}{2\alpha\sqrt{\beta}r-6\beta\sqrt{\alpha}q^2}\geq 0$

และ $\quad n=\dfrac{(\beta q^4+8\alpha p^4)-\alpha r^2}{2\sqrt{\alpha\beta}r-6\beta q^2}\geq 0$

พิสูจน์ กำหนดให้

$$\alpha\left[(x+a)^4+(x+b)^4\right]=\beta\left[(y+c)^4+(y+d)^4\right];\ a,b,c,d\in\mathbb{R}\ ,\alpha,\beta\in\mathbb{R}^{+} \qquad (3)$$

และให้ $u=\dfrac{1}{2}\left[\left(x+a\right)+\left(x+b\right)\right]=x+\dfrac{a+b}{2}$ และ $v=\dfrac{1}{2}\left[\left(y+c\right)+\left(y+d\right)\right]=y+\dfrac{c+d}{2}$

จะได้ $\quad x=u-(\dfrac{a+b}{2})\ ,\qquad y=v-(\dfrac{c+d}{2})$

แทน $\quad x=u-(\dfrac{a+b}{2})$ และ $y=v-(\dfrac{c+d}{2})$ ใน (3)

จะได้ $\quad \alpha\left[(u+(\dfrac{a-b}{2}))^4+(u-(\dfrac{a-b}{2}))^4\right]=\beta\left[(v+(\dfrac{c-d}{2}))^4+(v-(\dfrac{c-d}{2}))^4\right]$

ให้ $\quad p=\dfrac{a-b}{2}\ ,\ q=\dfrac{c-d}{2}$ และ $u^2=m\ ,\ v^2=n$

ได้ $\quad \alpha\left[m^2+6p^2m+p^4\right]=\beta\left[n^2+6q^2n+q^4\right]$

นั่นคือ $\quad m=\pm\sqrt{\dfrac{\beta n^2+6\beta q^2n+(\beta q^4+8\alpha p^4)}{\alpha}}-3p^2$

ให้ $\quad z^2=\dfrac{\beta n^2+6\beta q^2n+(\beta q^4+8\alpha p^4)}{\alpha}$ เมื่อ z เป็นจำนวนจริง

โดยวิธีไดโอเฟนตัส มีจำนวนจริง r ที่ทำให้ $z=\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}n+r$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริงใดๆ

นั่นคือ $\dfrac{\beta n^2+6\beta q^2 n+(\beta q^4+8\alpha p^4)}{\alpha}=\left(z=\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}n+r\right)^2=\dfrac{\beta}{\alpha}n^2+2\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}rn+r^2$

$$n=\frac{(\beta q^4+8\alpha p^4)-\alpha r^2}{2\sqrt{\alpha\beta}r-6\beta q^2}$$

พิจารณารากที่สองที่เป็นบวก จะได้

$$\sqrt{\frac{\beta n^2+6\beta q^2 n+(\beta q^4+8\alpha p^4)}{\alpha}}=\frac{\alpha\sqrt{\beta}r^2-6\beta\sqrt{\alpha}q^2 r+(\beta^{\frac{3}{2}}q^4+8\alpha\sqrt{\beta}p^4)}{2\alpha\sqrt{\beta}r-6\beta\sqrt{\alpha}q^2}$$

จะได้คำตอบหนึ่งสำหรับ m คือ

$$m=\sqrt{\frac{\beta n^2+6\beta q^2 n+(\beta q^4+8\alpha p^4)}{\alpha}}-3p^2=\frac{\alpha\sqrt{\beta}r^2-(6\beta q^2\sqrt{\alpha}+6\alpha p^2\sqrt{\beta})r+(\beta^{\frac{3}{2}}q^4+8\alpha p^4\sqrt{\beta}+18\beta p^2q^2\sqrt{\alpha})}{2\alpha\sqrt{\beta}r-6\beta\sqrt{\alpha}q^2}$$

จาก $u^2=m$, $v^2=n$ ดังนั้นจะได้ $u=\pm\sqrt{m}$ และ $v=\pm\sqrt{n}$

แทนค่า u และ v ใน $x=u-(\dfrac{a+b}{2})$ และ $y=v-(\dfrac{c+d}{2})$ ได้ $x=\left(\pm\sqrt{m}\right)-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$, $y=\pm\left(\sqrt{n}\right)-\left(\dfrac{c+d}{2}\right)$

เมื่อ $$m=\frac{\alpha\sqrt{\beta}r^2-(6\beta\sqrt{\alpha}q^2+6\alpha\sqrt{\beta}p^2)r+(\beta^{\frac{3}{2}}q^4+8\alpha\sqrt{\beta}p^4+18\beta\sqrt{\alpha}p^2q^2)}{2\alpha\sqrt{\beta}r-6\beta\sqrt{\alpha}q^2}\geq 0$$

และ $$n=\frac{(\beta q^4+8\alpha p^4)-\alpha r^2}{2\sqrt{\alpha\beta}r-6\beta q^2}\geq 0$$

ตัวอย่างที่1 จงหาคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $2x^4=3y^4$

วิธีทำ $a=b=c=d=0, \alpha=1, \beta=\dfrac{3}{2}$

หา p และq จากสูตร $p=\dfrac{a-b}{2}$, $q=\dfrac{c-d}{2}$

ได้ $p=0, q=0$

หา m จากสูตร $$m=\frac{\alpha\sqrt{\beta}r^2-(6\beta\sqrt{\alpha}q^2+6\alpha\sqrt{\beta}p^2)r+(\beta^{\frac{3}{2}}q^4+8\alpha\sqrt{\beta}p^4+18\beta\sqrt{\alpha}p^2q^2)}{2\alpha\sqrt{\beta}r-6\beta\sqrt{\alpha}q^2}$$

ได้ $m=\dfrac{1}{2}r$ เมื่อ $r\neq 0$

หา n จากสูตร $$n=\frac{(\beta q^4+8\alpha p^4)-\alpha r^2}{2\sqrt{\alpha\beta}r-6\beta q^2}$$

ได้ $n=-\dfrac{\sqrt{6}}{4}r$ เมื่อ $r\neq 0$

จาก $x=\left(\pm\sqrt{m}\right)-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ และ $y=\pm\left(\sqrt{n}\right)-\left(\dfrac{c+d}{2}\right)$

จะได้ $x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}r}$ และ $y=\pm\sqrt{-\dfrac{\sqrt{6}}{4}r}$ เมื่อ $r\neq 0$

แต่ไม่สามารถหาจำนวนจริง r ที่ทำให้ x และ y เป็นจำนวนจริงได้ ดังนั้น วิธีข้างต้นไม่สามารถหาคำตอบของสมการได้

หมายเหตุ ในกรณีที่ a=b=c=d=0 สามารถหาคำตอบโดยการแก้สมการอย่างง่าย เช่น ในตัวอย่างที่1 จะได้

$$y = \pm\sqrt[4]{\frac{2}{3}x^4}$$

ตัวอย่างที่2 จงหาคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $(x-2)^4 + x^4 = (y+5)^4 + y^4$

วิธีทำ $a = -2, b = 0, c = 5, d = 0, \alpha = 1, \beta = 1$

หา p และ q จากสูตร $p = \frac{a-b}{2}$, $q = \frac{c-d}{2}$

ได้ $p = \frac{-2-0}{2} = -1, q = \frac{5-0}{2} = \frac{5}{2}$

หา m จากสูตร $m = \frac{\alpha\sqrt{\beta}r^2 - (6\beta\sqrt{\alpha}q^2 + 6\alpha\sqrt{\beta}p^2)r + (\beta^{\frac{3}{2}}q^4 + 8\alpha\sqrt{\beta}p^4 + 18\beta\sqrt{\alpha}p^2q^2)}{2\alpha\sqrt{\beta}r - 6\beta\sqrt{\alpha}q^2}$

ได้ $m = \frac{16r^2 - 696r + 2553}{8(4r-75)}$

หา n จากสูตร $n = \frac{(\beta q^4 + 8\alpha p^4) - \alpha r^2}{2\sqrt{\alpha\beta}r - 6\beta q^2}$

ได้ $n = \frac{753 - 16r^2}{8(4r-75)}$

จาก $x = \left(\pm\sqrt{m}\right) - \left(\frac{a+b}{2}\right)$ และ $y = \pm\left(\sqrt{n}\right) - \left(\frac{c+d}{2}\right)$

จะได้ $x = \pm\sqrt{\frac{16r^2 - 696r + 2553}{8(4r-75)}} + 1$ และ $y = \pm\sqrt{\frac{753-16r^2}{8(4r-75)}} - \frac{5}{2}$

เมื่อ $r \in \left[\frac{\sqrt{753}}{4}, \frac{75}{4}\right)$

ตัวอย่างที่3 จงหาคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $(x+1)^4 + (x+3)^4 = (y+2)^4 + (y+6)^4$

วิธีทำ $a = 1, b = 3$, $c = 2$, $d = 6$, $\alpha = 1, \beta = 1$

หา p และ q จากสูตร $p = \frac{a-b}{2}$, $q = \frac{c-d}{2}$

ได้ $p = \frac{a-b}{2} = \frac{1-3}{2} = -1, q = \frac{c-d}{2} = \frac{2-6}{2} = -2$

หา m จากสูตร $m = \frac{\alpha\sqrt{\beta}r^2 - (6\beta\sqrt{\alpha}q^2 + 6\alpha\sqrt{\beta}p^2)r + (\beta^{\frac{3}{2}}q^4 + 8\alpha\sqrt{\beta}p^4 + 18\beta\sqrt{\alpha}p^2q^2)}{2\alpha\sqrt{\beta}r - 6\beta\sqrt{\alpha}q^2}$

ได้ $m = \frac{r^2 - 30r + 96}{2(r-12)}$

หา n จากสูตร $n=\dfrac{(\beta q^4+8\alpha p^4)-\alpha r^2}{2\sqrt{\alpha\beta}r-6\beta q^2}$

ได้ $n=\dfrac{24-r^2}{2(r-12)}$

จาก $x=\left(\pm\sqrt{m}\right)-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ และ $y=\pm\left(\sqrt{n}\right)-\left(\dfrac{c+d}{2}\right)$

จะได้ $x=\left(\pm\sqrt{\dfrac{r^2-30r+96}{2(r-12)}}\right)-2$ และ $y=\left(\pm\sqrt{\dfrac{24-r^2}{2(r-12)}}\right)-4$ เมื่อ $r\in\left[2\sqrt{6},12\right)$

เมื่อแทนค่า r=6 ได้ x = 0 หรือ x = -4 , y = -3 หรือ y = -5

เลือกแทน x = 0 และ y = -3 ใน สมการ ทำให้ได้สมการไดโอแฟนไทล์อย่างง่าย $1^4+3^4=(-1)^4+3^4$

ตัวอย่างที่4 จงหาคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการ

$$\frac{1}{25}\left[(x-2)^4+(x+4)^4\right]=\frac{1}{4}\left[(y+1)^4+(y+3)^4\right]$$

วิธีทำ $a=-2, b=4, c=1, d=3, \alpha=\dfrac{1}{25}, \beta=\dfrac{1}{4}$

หา p และ q จากสูตร $p=\dfrac{a-b}{2}$, $q=\dfrac{c-d}{2}$

ได้ $p=\dfrac{-2-4}{2}=-3, q=\dfrac{1-3}{2}=-1$

หา m จากสูตร $m=\dfrac{\alpha\sqrt{\beta}r^2-(6\beta\sqrt{\alpha}q^2+6\alpha\sqrt{\beta}p^2)r+(\beta^{\frac{3}{2}}q^4+8\alpha\sqrt{\beta}p^4+18\beta\sqrt{\alpha}p^2q^2)}{2\alpha\sqrt{\beta}r-6\beta\sqrt{\alpha}q^2}$

ได้ $m=\dfrac{4r^2-276r+4,237}{4(2r-15)}$

หา n จากสูตร $n=\dfrac{(\beta q^4+8\alpha p^4)-\alpha r^2}{2\sqrt{\alpha\beta}r-6\beta q^2}$

ได้ $n=\dfrac{2,617-4r^2}{10(2r-15)}$

จาก $x=\left(\pm\sqrt{m}\right)-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ และ $y=\pm\left(\sqrt{n}\right)-\left(\dfrac{c+d}{2}\right)$

จะได้ $x=\left(\pm\sqrt{\dfrac{4r^2-276r+4,237}{4(2r-15)}}\right)-1$ และ $y=\left(\pm\sqrt{\dfrac{2,617-4r^2}{10(2r-15)}}\right)-2$

เมื่อ $r\in\left(\dfrac{15}{2},\dfrac{69}{2}-\sqrt{131}\right]$

ตัวอย่างที่5 จงหาคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการ

$$2\left[(x+\frac{1}{2})^4+(x-\frac{3}{4})^4\right]=3\left[(y-\frac{5}{4})^4+(y-\frac{1}{4})^4\right]$$

วิธีทำ $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{4}, c = -\frac{5}{4}, d = -\frac{1}{4}, \alpha = 2, \beta = 3$

หา p และ q จากสูตร $p = \frac{a-b}{2}$, $q = \frac{c-d}{2}$

ได้ $p = \frac{a-b}{2} = \frac{5}{8}, q = \frac{c-d}{2} = -\frac{1}{2}$

หา m จากสูตร $$m = \frac{\alpha\sqrt{\beta r^2} - (6\beta\sqrt{\alpha q^2} + 6\alpha\sqrt{\beta p^2})r + (\beta^{\frac{3}{2}} q^4 + 8\alpha\sqrt{\beta p^4} + 18\beta\sqrt{\alpha p^2 q^2})}{2\alpha\sqrt{\beta r} - 6\beta\sqrt{\alpha q^2}}$$

ได้ $$m = \frac{512\sqrt{3}r^2 - (1152\sqrt{2} + 1200\sqrt{3})r + (673\sqrt{3} + 1350\sqrt{2})}{128(8\sqrt{3}r - 9\sqrt{2})}$$

หา n จากสูตร $$n = \frac{(\beta q^4 + 8\alpha p^4) - \alpha r^2}{2\sqrt{\alpha\beta r} - 6\beta q^2}$$

ได้ $$n = \frac{673 - 512r^2}{128(4\sqrt{6}r - 9)}$$

จาก $x = \left(\pm\sqrt{m}\right) - \left(\frac{a+b}{2}\right)$ และ $y = \pm\left(\sqrt{n}\right) - \left(\frac{c+d}{2}\right)$

จะได้ $$x = \left(\pm\sqrt{\frac{512\sqrt{3}r^2 - (1152\sqrt{2} + 1200\sqrt{3})r + (673\sqrt{3} + 1350\sqrt{2})}{128(8\sqrt{3}r - 9\sqrt{2})}}\right) + \frac{1}{8}$$

และ $$y = \left(\pm\sqrt{\frac{673 - 512r^2}{128(4\sqrt{6}r - 9)}}\right) + \frac{3}{4}$$ เมื่อ $r \in \left(\frac{3\sqrt{6}}{8}, \frac{\left(72\sqrt{2} + 75\sqrt{3}\right) - \sqrt{11,091}}{64\sqrt{3}}\right]$

ผลสรุป

ผลเฉลยสมการ $\alpha\left[(x+a)^4 + (x+b)^4\right] = \beta\left[(y+c)^4 + (y+d)^4\right]$; $a,b,c,d \in R$, $\alpha, \beta \in R^+$ ที่ได้เป็นเพียงรูปแบบหนึ่งของคำตอบของสมการเท่านั้น ยังไม่ครอบคลุมคำตอบทั้งหมดของสมการ แต่ก็เป็นแนวทางหนึ่งในการหาผลเฉลยคำตอบของสมการในรูป $\alpha\left[(x+a)^4 + (x+b)^4\right] = \beta\left[(y+c)^4 + (y+d)^4\right]$; $a,b,c,d \in R$, $\alpha, \beta \in R^+$ และ , $\alpha, \beta \in R^+$ โดยในการศึกษาครั้งนี้ทำให้ได้ตัวอย่างและแบบฝึกหัด ไปใช้ในการจัดการเรียนการสอนต่อไป เพื่อเป็นความรู้เพิ่มเติมให้กับนักเรียน

เอกสารอ้างอิง

ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ. พีชคณิต. กรุงเทพฯ: ด่านสุทธาการพิมพ์; 2553.

A.J.Choudhry. The Diophantine Equation $A^4 + B^4 = +C^4 + D^4$. Indian J.pure appl.Math 1991; 22: 9-11.

J.D. Harper. Ramanujun, Quadratic Forms and the sum of three Cubes. Mathematics Magazine 2013; 86: 275-279.

L.E.Dickson. History of the Theory of Number 2. New York: Chelsea Publishing; 1920.